

Les états de surface d'un opérateur de Schrödinger discret à potentiel de surface périodique

Anne Boutet de Monvel & Anna Surkova

Université Paris 7 Denis Diderot,
Institut de Mathématiques, case 7012,
2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05

Résumé

Nous étudions un exemple significatif d'opérateur de Schrödinger discret en dimension 2, à potentiel de surface périodique. Nous démontrons que le spectre des états de surface est absolument continu et que les fonctions propres généralisées correspondantes sont à décroissance exponentielle en la variable transversale au support du potentiel et qu'elles se comportent comme des fonctions de Floquet-Bloch en la variable longitudinale. Nous donnons une description détaillée du spectre. C'est l'image de l'intervalle $[0, 1)$ par une fonction continue par morceaux, dite *loi de dispersion des valeurs propres*. Ainsi, le spectre est la réunion d'un nombre fini d'intervalles disjoints, séparés par des lacunes. Le nombre de bandes est égal à la période du potentiel. Nous obtenons aussi une estimation des longueurs des lacunes en fonction des paramètres du problème.

Table des matières

1	Introduction et résultats	3
1.1	Les opérateurs de Schrödinger à potentiel de surface	3
1.2	Spectre surfacique et états de surface	4
1.3	L'opérateur de surface étudié	5
1.4	Les résultats principaux : théorèmes 1 et 2	6
2	Schéma des démonstrations	7
2.1	Le problème spectral réduit	8
2.2	Le problème associé	9
2.3	Etude du spectre de l'opérateur associé $H_\varepsilon(\alpha, E)$	11
2.4	Complétude locale des états de surface	13
3	Démonstration du théorème 1 : le spectre surfacique	14
3.1	Résultats perturbatifs : propositions 1 et 2	15
3.2	Les fonctions $\Lambda(\alpha, E)$, $\Phi(\alpha, E)$, $\mathcal{E}(\alpha)$	17
3.2.1	Les fonctions $\Lambda_0(\alpha, E)$, $\Phi_0(\alpha, E)$ et $\mathcal{E}_0(\alpha)$ pour l'opérateur $V(\alpha, E)$.	17
3.2.2	Schéma de construction des fonctions $\Lambda(\alpha, E)$, $\Phi(\alpha, E)$ et $\mathcal{E}(\alpha)$. . .	18
3.3	Démonstration du lemme 3	23
3.3.1	Partition \mathcal{P} de l'intervalle $[0, 1)$	23
3.3.2	Construction de $\Lambda(\alpha, E)$ et $\Phi(\alpha, E)$: le cas non résonant	24
3.3.3	Construction de $\Lambda(\alpha, E)$ et $\Phi(\alpha, E)$: le cas résonant	27
3.4	Démonstration du lemme 4	30
3.4.1	Construction de la fonction $\mathcal{E}(\alpha)$: le cas non résonant	31
3.4.2	Construction de la fonction $\mathcal{E}(\alpha)$: le cas résonant	32
4	Démonstration du théorème 2 : les états de surface	33
4.1	Preuve des points 1 et 2 : les états de surface u_E	33
4.2	Preuve du point 3 : absolue continuité de la mesure spectrale	35
4.3	Preuve du point 4 : la densité de la mesure spectrale	40
5	Preuves des résultats perturbatifs	41
5.1	Démonstration de la proposition 1 : perturbation sans résonance	41
5.2	Démonstration de la proposition 2 : perturbation avec résonance	42
	Bibliographie	45

1 Introduction et résultats

1.1 Les opérateurs de Schrödinger à potentiel de surface

Nous étudions un exemple d'opérateur de Schrödinger discret en dimension 2, à potentiel "de surface", i.e. porté par un sous-espace strict, en l'occurrence une droite, et périodique dans ce sous-espace. On suppose que ce sous-espace est la droite définie par $\xi = 0$ dans une décomposition de l'espace

$$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{X = (\xi, x) \mid x \in \mathbb{Z}, \xi \in \mathbb{Z}\}.$$

L'opérateur de Schrödinger, agissant dans l'espace $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$, est donné par :

$$h = h_0 + W \tag{1.1}$$

où h_0 est le laplacien discret, i.e.

$$(h_0 u)(\xi, x) = u(\xi - 1, x) + u(\xi + 1, x) + u(\xi, x - 1) + u(\xi, x + 1) \tag{1.2}$$

et où W est un "potentiel de surface", i.e. un opérateur de multiplication par une suite

$$W(\xi, x) = \delta(\xi)w(x) \tag{1.3}$$

où $w(x)$ est une suite quelconque et où $\delta(\xi)$ est le symbole de Kronecker :

$$\delta(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un tel potentiel W est concentré sur la droite $\{\xi = 0\}$ dans \mathbb{Z}^2 et présente donc une forte inhomogénéité spatiale.

Plus généralement, en dimension $d \geq 2$ quelconque, un opérateur de Schrödinger discret à potentiel de surface est un opérateur

$$h = h_0 + W \tag{1.1'}$$

agissant dans $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, où h_0 est le laplacien discret donné par

$$(h_0 u)(X) = \sum_{\substack{Y \in \mathbb{Z}^d \\ |Y-X|=1}} u(Y) \tag{1.2'}$$

et où le potentiel W est porté par un sous-espace strict qu'on suppose défini par $\xi = 0$ dans une décomposition de l'espace

$$\mathbb{Z}^d = \mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^m = \{X = (\xi, x) \mid \xi \in \mathbb{Z}^\nu, x \in \mathbb{Z}^m\},$$

avec $\nu, m \geq 1$. Autrement dit, $W(X) = W(\xi, x) = \delta(\xi)w(x)$ comme en (1.3).

L'intérêt de l'étude de tels potentiels vient de la physique, notamment de la théorie de propagation des ondes dans des milieux inhomogènes, par exemple, dans un milieu stratifié ou dans un réseau cristallin présentant des défauts. Ce type d'étude a commencé par la découverte, due à J.W.S. Rayleigh en 1887, des "ondes de surface" (voir [12, 13]). Rayleigh a étudié le modèle d'oscillation d'un demi-espace

$$\mathbb{R}_+^3 = \{(\xi, x), \xi \geq 0, x \in \mathbb{R}^2\}$$

homogène, isotrope et élastique et a découvert deux types de modes propres : des "*ondes de volume*" et des "*ondes de surface*".

(i) Les "*ondes de volume*" sont des modes qui oscillent et dont l'amplitude ne décroît à l'infini dans aucune des variables spatiales. Ces états ressemblent aux états propres d'oscillations d'un corps élastique infini. Ils se comportent comme des ondes statiques en la variable transversale ξ , dans la direction orthogonale à la "surface" $\xi = 0$, et comme des ondes planes selon la variable longitudinale x , le long de la "surface".

(ii) Les "*ondes de surface*" sont des modes dont l'amplitude décroît très vite quand la coordonnée transversale ξ tend vers l'infini, i.e. à mesure que l'on s'éloigne de la surface. Au contraire, ces oscillations se propagent comme des ondes planes le long de la "surface", i.e. en fonction de la coordonnée longitudinale x .

Ainsi, les oscillations de ce deuxième type se trouvent localisées au voisinage du bord du solide et elles se propagent le long de sa surface.

Le même phénomène a été observé plus tard par des physiciens dans l'étude des ondes acoustiques, des ondes sismiques, etc.

Dans les années 40-50, I.M. Lifshits a étudié les "ondes de Rayleigh" dans les réseaux cristallins. Il a été le premier à donner une formalisation mathématique de la notion d'"onde surfacique". Les modèles mathématiques correspondant aux effets de surface en physique des solides se réduisent souvent à l'étude du spectre et des fonctions propres d'opérateurs différentiels ou aux différences finies à potentiels de surface au sens de la définition que nous venons de donner. Il existe encore très peu de résultats sur l'existence et les propriétés des "ondes de surface". On peut citer les résultats récents de Grinshpun [8], de Pastur et Khoruzhenko [7], de Jakšić, Molchanov et Pastur [10], et de Jakšić et Molchanov [9].

1.2 Spectre surfacique et états de surface

Ce travail porte sur la résolution du problème spectral pour l'opérateur h :

$$hu = Eu \tag{1.4}$$

pour un choix particulier du potentiel W , cf. (1.6)-(1.6'). Nous nous intéressons surtout aux solutions "surfaciques", dont voici la définition :

Définition 1. Une solution non triviale u_E de l'équation (1.4) est dite *état de surface*, ou *état surfacique*, lorsqu'il existe un $a > d$ tel que

$$\sup_{x \in \mathbb{Z}^m} (1 + |x|^a)^{-1} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^\nu} |u_E(\xi, x)|^2 < \infty. \quad (1.5)$$

On appelle *spectre de surface*, ou *spectre surfacique*, l'ensemble

$$\sigma_{\text{surf}} = \{E \in \mathbb{R} \mid \text{il existe un état surfacique } u_E\}.$$

Dans les travaux cités ci-dessus le spectre de surface a la propriété de localisation d'Anderson. Autrement dit, c'est un spectre purement ponctuel et dense. De plus, les fonctions propres correspondantes sont exponentiellement localisées suivant toutes les directions de l'espace considéré. Ces solutions sont appelées "états de surface complètement localisés" dans [7].

C'est pourquoi il nous a semblé intéressant de trouver *a contrario* des potentiels de surface pour lesquels le spectre surfacique soit absolument continu et les états de surface soient non localisés suivant les variables longitudinales.

1.3 L'opérateur de surface étudié

Ce travail s'inspire des résultats classiques de la théorie spectrale de l'opérateur de Schrödinger à potentiel périodique, notamment de la théorie de Floquet-Bloch en dimension 1. Dans le cas de potentiels de surface il n'y a pas encore de théorie complète pour les potentiels qui sont périodiques dans le sous-espace qui les porte.

Le modèle de potentiel de surface W que nous étudions ici est en dimension 2 et sa restriction à son support $\xi = 0$ est le potentiel de Mathieu, bien connu en physique et en mathématiques. De façon précise, le potentiel de surface W est défini par la suite $w(x)$:

$$w(x) = C + 2\varepsilon \cos(2\pi\omega x) \quad (1.6)$$

pour une fréquence ω rationnelle, i.e.

$$\omega = \frac{p}{q}, \quad (1.6')$$

avec p et q entiers > 0 premiers entre eux. On obtient ainsi un potentiel de surface périodique de période q .

L'intérêt de cet exemple tient à la possibilité de décrire de façon précise et détaillée les états de surface. Il est remarquable que, pour cet opérateur à potentiel surfacique, on retrouve exactement les mêmes propriétés spectrales que pour l'opérateur de Mathieu en dimension 1. On peut espérer que les résultats que nous obtenons donnent une bonne image des propriétés spectrales que l'on peut attendre dans le cas d'un potentiel de surface périodique général.

Une autre raison pour considérer un tel exemple tient au fait que les résultats de notre travail peuvent présenter un intérêt pour l'étude du potentiel de surface quasi-périodique défini par la suite (1.6) lorsque la fréquence ω est irrationnelle.

1.4 Les résultats principaux : théorèmes 1 et 2

Les résultats de l'étude de l'opérateur h sont rassemblés dans les deux théorèmes suivants. Le premier décrit la géométrie du spectre. Le second porte sur la nature des fonctions propres et sur la mesure spectrale.

Dans ces deux théorèmes, h est l'opérateur défini par (1.1), (1.2), (1.3) et (1.6)-(1.6'). En particulier, les constantes C, ε, p, q se rapportent au choix de w fixé par (1.6) et (1.6').

Théorème 1. *On suppose $C \geq 10$.*

1. *Il existe alors $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(C, \omega)$ tel que, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, la partie*

$$\Sigma_{\text{surf}} = \sigma_{\text{surf}}(h) \cap \{\mathbb{R} \setminus [-4, 4]\}$$

du spectre de surface de l'opérateur h située en dehors de l'intervalle $[-4, 4]$ soit contenue dans l'intervalle

$$I = [\sqrt{C^2 + 4} - 2 - \varepsilon, \sqrt{C^2 + 4} + 2 + \varepsilon]. \quad (1.7)$$

2. *Cette partie du spectre est formée de q "zones" séparées par des lacunes :*

$$\Sigma_{\text{surf}} = \bigcup_{l=1}^q [a_l, b_l], \quad a_{l+1} - b_l > 0, \quad l = 1, \dots, q-1.$$

3. *Il existe une fonction $\mathcal{E}(\beta)$ définie et continue par morceaux sur l'intervalle $[0, 1)$ telle que le spectre de l'opérateur h en dehors de $[-4, 4]$ soit l'image de l'intervalle $[0, 1)$ par $\mathcal{E}(\beta)$:*

$$\Sigma_{\text{surf}} = \mathcal{E}([0, 1)).$$

4. *La fonction $\mathcal{E}(\beta)$ est deux fois dérivable sur chaque intervalle de continuité et a les propriétés suivantes :*

- 4.1. $|\mathcal{E}'(\beta)| \leq \text{const}$, pour tout $\beta \in [0, 1)$;

- 4.2. $|\mathcal{E}''(\beta)| \leq \text{const} \cdot \varepsilon^{-2}$, pour tout $\beta \in [0, 1)$;

- 4.3. $\mathcal{E}(\beta)$ a exactement $2q$ points d'extremum non-dégénérés : q maxima et q minima.

Au voisinage de chacun d'eux, on a l'estimation suivante : si β est tel que

$$|\mathcal{E}'(\beta)| < \text{const} \cdot \varepsilon^{3/2},$$

alors

$$|\mathcal{E}''(\beta)| > \text{const} \cdot \varepsilon^{-1/2}.$$

Les valeurs extrémales de $\mathcal{E}(\alpha)$ sont les extrémités des zones $[a_l, b_l]$, $l = 1, \dots, q$.

5. *Les longueurs des lacunes $[b_l, a_{l+1}]$, $l = 1, \dots, q-1$ vérifient :*

$$\varepsilon^2 < a_{l+1} - b_l < \varepsilon^{3/2}.$$

Remarque. Dans la suite la fonction $\mathcal{E}(\beta)$ est appelée *loi de dispersion des valeurs propres*.

Théorème 2. Soit $\mathcal{E}(\beta)$ la loi de dispersion définie au théorème 1. Alors :

1. Les fonctions propres généralisées $u_E(\xi, x)$ correspondant aux valeurs du paramètre spectral $E = \mathcal{E}(\beta)$ situées dans les intervalles $[a_l, b_l]$, pour $l = 1, \dots, q$, sont des “états de surface”.

Elles sont à décroissance exponentielle en ξ lorsque $|\xi| \rightarrow \infty$. Elles se comportent en x comme des fonctions de Floquet-Bloch, i.e. il existe une fonction $\gamma : \Sigma_{\text{surf}} \rightarrow \mathbb{R}$, appelée “quasi-impulsion”, telle que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$ et tout $\xi \in \mathbb{Z}$, on ait :

$$u_E(\xi, x + q) = e^{i\gamma(E)q} u_E(\xi, x).$$

2. La quasi-impulsion $\gamma(E)$ définie ci-dessus est l'inverse de la loi de dispersion, i.e., pour tout $E \in \Sigma_{\text{surf}}$, on a :

$$\mathcal{E}(\gamma(E)) \equiv E.$$

3. La restriction à Σ_{surf} de la mesure spectrale de l'opérateur h est absolument continue. Pour tout point $E \in \Sigma_{\text{surf}}$ distinct des extrémités des intervalles $[a_l, b_l]$, $l = 1, \dots, q$, sa densité est de la forme :

$$r_{(\xi, x)}(E) = \lim_{\nu \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \text{Im} g((\xi, x), (\xi, x); E + i\nu) = |u_E(\xi, x)|^2 \gamma'(E)$$

où $g((\xi, x), (\xi, x); E + i\nu)$ est l'élément matriciel de la résolvante de l'opérateur h .

4. La densité $r_{(\xi, x)}(E)$ est de classe L_{loc}^s pour tout $s \in [1, 2[$.

2 Schéma des démonstrations

La démonstration des résultats que nous venons d'énoncer est de caractère constructif. Elle comporte plusieurs étapes :

- A. Réduction du problème spectral (1.4) à un problème spectral réduit (2.6).
- B. Transformation du problème spectral réduit \mathcal{R}_E en un problème associé (2.9).
- C. Etude du problème associé $\mathcal{P}_{\alpha, E}$ et du problème spectral correspondant (2.11).
- D. Démonstration de la complétude locale des états de surface.

L'étape A est expliquée au paragraphe 2.1, l'étape B au paragraphe 2.2, l'étape C au paragraphe 2.3 et l'étape D au paragraphe 2.4. L'étape C requiert des démonstrations détaillées qui font l'objet des sections 3, 4, 5.

2.1 Le problème spectral réduit

On se place en dimension $d \geq 2$ et on considère les opérateurs h, h_0, W définis par (1.1'), (1.2') et (1.3). Soient $g((\xi, x), (\eta, y); z)$ les éléments matriciels de l'opérateur $(h - \lambda)^{-1}$ et $g_0(\xi - \eta, x - y; z)$ ceux de l'opérateur $(h_0 - \lambda)^{-1}$.

Lemme 1. *Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors*

$$g((\xi, x), (\eta, y); z) = g_0(\xi - \eta, x - y; z) - \sum_{x', y' \in \mathbb{Z}^m} g_0(\xi, x - y'; z) (\Gamma^{-1} \cdot \Gamma_0^{-1})(x', y'; z) g_0(\eta, x' - y; z), \quad (2.1)$$

où

$$\Gamma(z) = \Gamma_0^{-1}(z) + W, \quad (2.2)$$

où W est l'opérateur de multiplication par la suite $w(x)$ dans $\ell^2(\mathbb{Z}^m)$ et où $\Gamma_0(z)$ est l'opérateur dans $\ell^2(\mathbb{Z}^m)$ dont les éléments matriciels sont :

$$\Gamma_0(x, y; z) = g_0(0, x - y; z), \quad x, y \in \mathbb{Z}^m. \quad (2.3)$$

Démonstration. Elle s'appuie sur l'identité de la résolvante (voir [4, 14]), et, précisément, sur la formule suivante. Si A et B sont deux opérateurs auto-adjoints, et si R_A est la résolvante de A et R_{A+B} celle de la somme $A + B$, alors :

$$R_{A+B}(z) = R_A(z) - R_{A+B}(z) B R_A(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

La démonstration consiste à appliquer cette formule pour $A = h_0$ et $B = W$ définis par (1.2') et (1.3). Nous renvoyons à [8] pour les détails. \square

Il se pose alors la question de savoir ce qui se passe lorsque $z = E \in \mathbb{R}$. Il est naturel de s'attendre à ce que l'inversibilité de l'opérateur $\Gamma(E)$ joue un rôle essentiel. En effet, fixons un $E \in \mathbb{R} \setminus [-2d, 2d]$ pour garantir que les éléments matriciels $g_0(\xi - \eta, x - y; E)$ de la résolvante du laplacien h_0 soient bien définis et à décroissance exponentielle quand $|\xi - \eta|$ ou $|x - y|$ tend vers l'infini. Alors, si E est tel que $\Gamma^{-1}(E)$ existe, la série du membre de droite de l'égalité (2.1) converge encore et les éléments $g((\xi, x), (\eta, y); E)$ sont tous bien définis. Ce raisonnement permet de supposer que si, pour un E donné, $\Gamma^{-1}(E)$ existe, alors E n'appartient pas au spectre de l'opérateur h .

Du point de vue de la théorie spectrale, l'inversibilité de l'opérateur $\Gamma(E)$ est équivalente au fait que $0 \notin \sigma(\Gamma(E))$. On voit ainsi qu'il est intéressant de comparer les valeurs du paramètre spectral E qui appartiennent au spectre de l'opérateur h et celles pour lesquelles le spectre de $\Gamma(E)$ contient 0. Les résultats à ce propos sont résumés dans le lemme suivant.

Lemme 2. *Soient $\sigma(h)$ le spectre de l'opérateur h et $\sigma(\Gamma(E))$ celui de $\Gamma(E)$. On a alors, pour tout $E \in \mathbb{R} \setminus [-2d, 2d]$, l'équivalence*

$$E \in \sigma(h) \iff 0 \in \sigma(\Gamma(E)).$$

Si $E \in \mathbb{R} \setminus [-2d, 2d]$ est tel que $0 \in \sigma(\Gamma(E))$ et si φ_E est solution de l'équation

$$\Gamma(E)\varphi_E = 0, \quad (2.4)$$

alors la suite $u_E(\xi, x)$ définie par

$$u_E(\xi, x) = - \sum_{y \in \mathbb{Z}^m} g_0(\xi, x - y; E) w(y) \varphi_E(y) \quad (2.5)$$

est solution du problème spectral (1.4).

Démonstration. Ce lemme est démontré dans [5], et sa démonstration est inspirée de Schröder [15]. \square

On se place désormais en dimension $d = 2$. Compte tenu de la forme de la fonction $w(x)$ donnée dans (1.6), l'application du lemme 1 nous ramène à l'étude de l'opérateur $\Gamma(E)$ agissant dans l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$\Gamma(E) = \Gamma_0^{-1}(E) + C + 2\varepsilon \cos(2\pi\omega x).$$

Les éléments matriciels de Γ_0 sont définis par (2.3).

Nous cherchons les valeurs du paramètre spectral E pour lesquelles l'opérateur $\Gamma(E)$ n'est pas inversible, ce qui équivaut à la résolution du *problème spectral réduit* \mathcal{R}_E :

$$\Gamma(E)\varphi = 0. \quad (2.6)$$

Nous montrons que l'ensemble des valeurs du paramètre spectral E pour lesquelles le problème (2.6) a une solution non triviale est l'image de l'intervalle $[0, 1)$ par une certaine fonction $\mathcal{E}(\beta)$ que nous appelons *loi de dispersion*.

2.2 Le problème associé

Pour étudier l'opérateur $\Gamma(E)$ nous utilisons d'abord la *propriété de dualité* de son potentiel $\cos(2\pi\omega x)$. Cette propriété remarquable a été découverte par André et Aubry (voir [2]). Ils ont trouvé que l'opérateur de multiplication par la suite $\{\cos(2\pi\omega x)\}$ dans l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ équivaut au laplacien discret par transformation de Fourier. Cette observation a eu beaucoup d'applications dans l'analyse spectrale de l'opérateur presque Mathieu (voir, par exemple, [3, 1, 6]). En particulier, Chulaevsky et Delyon ([6]) ont utilisé cette dualité d'André et Aubry pour démontrer que le spectre de l'opérateur presque Mathieu est absolument continu lorsque la constante de couplage est petite.

En suivant l'idée d'André et Aubry, nous cherchons une solution du problème spectral réduit (2.6) sous la forme :

$$\varphi(x) = e^{2\pi i \alpha x} \cdot \sum_{z=1}^q e^{2\pi i \omega z x} \psi(z), \quad \alpha \in [0, 1/q) \quad (2.7)$$

où $\psi(z) = \psi(z + q)$ pour tout $z \in \mathbb{Z}$. Il est facile de voir que le potentiel $\cos(2\pi\omega x)$ se transforme ainsi en le laplacien discret en raison de la propriété de dualité d'André et Aubry. Quant à l'opérateur $\Gamma_0(E)$, on remarque que ses éléments matriciels définis au lemme 1 par (2.3) sont des transformés de Fourier de la fonction

$$\gamma \mapsto -\frac{1}{\sqrt{(E - 2 \cos \gamma)^2 - 4}}, \quad \gamma \in [-\pi, \pi].$$

En effet, en dimension 2, les éléments matriciels $g_0(0, x - y; E)$ de la résolvante du laplacien admettent la représentation intégrale suivante :

$$g_0(0, x - y; E) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(x-y, \gamma)} d\gamma}{\sqrt{(E - 2 \cos \gamma)^2 - 4}}. \quad (2.8)$$

Il est alors évident que (2.7) transforme $\Gamma_0^{-1}(E)$ en un opérateur de multiplication. On en déduit que les coefficients $\psi(z)$ sont solutions du problème suivant que nous appelons *le problème associé* $\mathcal{P}_{\alpha, E}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon\{\psi(z - 1) + \psi(z + 1)\} + (C - \sqrt{(E - 2 \cos 2\pi(\omega z + \alpha))^2 - 4})\psi(z) &= 0 \\ \psi(z + q) &= \psi(z), \quad \forall z \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \in [0, 1/q). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Notons

$$V(\beta, E) = C - \sqrt{(E - 2 \cos 2\pi\beta)^2 - 4}, \quad \beta \in [0, 1). \quad (2.10)$$

Rappelons que l'application de l'identité de la résolvante nous oblige à considérer les valeurs du paramètre E en dehors du spectre du laplacien, i.e. puisque nous sommes en dimension 2, en dehors de l'intervalle $[-4, 4]$. On peut aussi observer que le potentiel W de l'opérateur h est ≥ 0 . Il en résulte qu'en dehors de l'intervalle $[-4, 4]$ l'opérateur h n'a pas de spectre dans l'intervalle $(-\infty, 4)$ (voir, par exemple, [11]). On va donc supposer dans la suite que $E > 4$.

Soit $H_\varepsilon(\alpha, E)$ l'opérateur associé au problème (2.9) dans l'espace des suites périodiques de période q :

$$(H_\varepsilon(\alpha, E)\psi)(x) = \varepsilon\{\psi(x - 1) + \psi(x + 1)\} + V(\omega \cdot x + \alpha; E)\psi(x), \quad x = 1, \dots, q.$$

Pour trouver les solutions de l'équation (2.9) nous étudions d'abord le spectre de l'opérateur $H_\varepsilon(\alpha, E)$ et son comportement par rapport aux deux paramètres α et E . Nous devons donc résoudre le *problème spectral correspondant* :

$$H_\varepsilon(\alpha, E)\psi = \lambda\psi. \quad (2.11)$$

2.3 Etude du spectre de l'opérateur associé $H_\varepsilon(\alpha, E)$

Une première remarque très importante que nous faisons concerne la position du spectre de l'opérateur $H_\varepsilon(\alpha, E)$ sur l'axe réel et sa variation en fonction du paramètre E . Nous allons nous intéresser surtout aux valeurs de E pour lesquelles zéro appartient au spectre de $H_\varepsilon(\alpha, E)$. C'est pourquoi il convient d'éliminer au départ toutes les valeurs E pour lesquelles on sait *a priori* que le spectre de cet opérateur ne contient pas 0. D'après la théorie générale (voir [11]), pour tout $E > 4$ fixé, le spectre de l'opérateur $H_\varepsilon(\alpha, E)$ est contenu dans l'intervalle

$$\left[\min_{\beta \in [0,1]} V(\beta; E) - 2\varepsilon, \max_{\beta \in [0,1]} V(\beta; E) + 2\varepsilon \right].$$

Il n'est pas difficile de montrer, en utilisant la forme de la fonction $V(\alpha, E)$ donnée dans (2.10), que pour les valeurs du paramètre E situées en dehors de l'intervalle

$$\tilde{I} = \left[\sqrt{(C - 2\varepsilon)^2 + 4} - 2, \sqrt{(C - 2\varepsilon)^2 + 4} + 2 \right], \quad (2.12)$$

le spectre de l'opérateur $H_\varepsilon(\alpha, E)$ ne contient pas 0. On en déduit alors que 0 n'est pas dans le spectre de l'opérateur $\Gamma(E)$. Vu le lemme 2, il en résulte aussitôt que *la partie du spectre de l'opérateur h située en dehors du spectre du laplacien, est contenue dans l'intervalle \tilde{I} défini par (2.12).*

Nous allons donc supposer dans la suite que E varie dans cet intervalle \tilde{I} .

L'avantage principal du problème (2.11) tient au fait que c'est un problème en dimension finie q . Ceci implique que, pour tout α et tout E , le spectre de $H(\alpha, E)$ consiste en q valeurs propres. Pour les calculer nous utilisons les méthodes de la théorie des perturbations. Cela nous oblige à choisir la constante ε assez petite. Nous prenons pour opérateur non perturbé $V(\alpha, E)$ l'opérateur de multiplication par la suite $\{V(\alpha + \omega)\}_{x=1, \dots, q}$. Son spectre est évidemment formé des points

$$\bar{\lambda}_i(\alpha, E) = V(\alpha + \omega i; E), \quad i = 1, \dots, q.$$

Nous voulons maintenant évaluer l'effet de la perturbation $\varepsilon\Delta$. Chaque valeur propre $\lambda_i(\alpha, E)$ de l'opérateur $H_\varepsilon(\alpha, E)$ s'écrit formellement comme la somme d'une série qui contient en particulier toutes les puissances des diviseurs (voir la proposition 1 et sa démonstration) :

$$\frac{1}{\bar{\lambda}_i(\alpha, E) - \bar{\lambda}_k(\alpha, E)} = \frac{1}{V(\alpha + \omega i; E) - V(\alpha + \omega k; E)}, \quad k \neq i.$$

S'il se trouve que, pour un certain entier k , les deux valeurs $\bar{\lambda}_i(\alpha, E)$ et $\bar{\lambda}_k(\alpha, E)$ sont proches l'une de l'autre, alors les séries ne convergent pas. La forme de la fonction V , pour un E fixé, fait que cela peut effectivement arriver pour certaines valeurs de α (voir figure 1). En effet, comme, pour tout E fixé, toute valeur de la fonction V , sauf les extrémales, admet exactement deux antécédents, il existe des points α_{ki} tels que $V(\alpha_{ki} +$

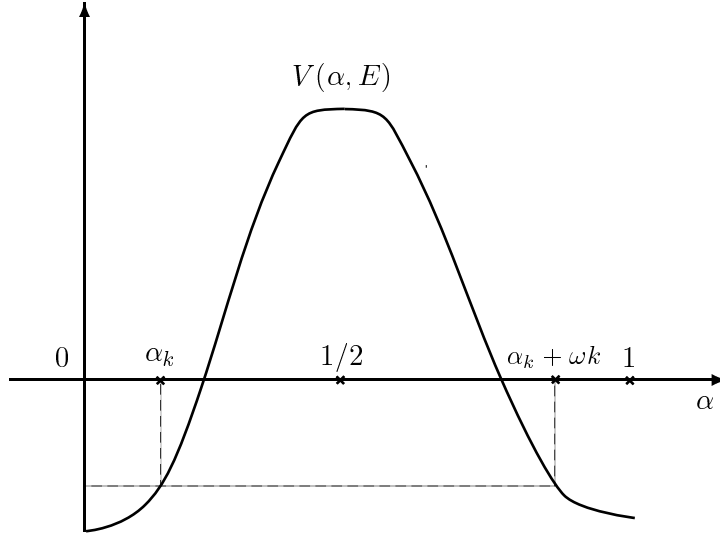


Figure 1: Graphe de $V(\alpha, E)$ comme fonction de α , E étant fixé

$\omega i, E) = V(\alpha_{ki} + \omega k, E)$. Si α est proche de l'un de ces points α_{ki} les valeurs $\bar{\lambda}_i(\alpha, E)$ et $\bar{\lambda}_k(\alpha, E)$ sont proches l'une de l'autre et nous ne pouvons pas utiliser les séries de la théorie des perturbations ordinaire pour déterminer les valeurs propres $\lambda_i(\alpha, E)$ et $\lambda_k(\alpha, E)$ de l'opérateur $H_\varepsilon(\alpha, E)$. C'est ce qu'on appelle le phénomène de *résonance*.

Dans les cas de résonance nous allons utiliser une autre forme de série de perturbation qui définit les valeurs propres correspondantes (voir la proposition 2).

Nos hypothèses permettent d'analyser avec une bonne précision le comportement des valeurs propres en fonction des deux paramètres α et E . A cet effet, nous allons construire, en suivant une idée de Ya. Sinai [16]), deux fonctions

$$\begin{aligned}\Lambda(\alpha, E) &: [0, 1) \times \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R} \\ \Phi(\alpha, E; \cdot) &: [0, 1) \times \tilde{I} \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})\end{aligned}$$

telles que, pour tout $\alpha \in [0, \frac{1}{q})$ et pour tout $E \in \tilde{I}$, les valeurs propres et les fonctions propres de $H_\varepsilon(\alpha, E)$ soient données, pour $m = 1, \dots, q$, par :

$$\begin{aligned}\lambda_m(\alpha, E) &= \Lambda(\alpha + \omega m, E) \\ \psi_m(\alpha, E) &= \Phi(\alpha + \omega m, E; \cdot - m).\end{aligned}$$

Notre but à ce stade de la démonstration est de trouver les valeurs du paramètre E pour lesquelles le spectre de l'opérateur $H_\varepsilon(\alpha, E)$ contient 0 comme valeur propre. Nous allons donc étudier la fonction $\mathcal{E}(\alpha)$ définie de façon implicite par :

$$\Lambda(\alpha, \mathcal{E}(\alpha)) \equiv 0.$$

Une analyse détaillée de la fonction $\Lambda(\alpha, E)$ permet de trouver $\mathcal{E}(\beta)$ et d'en décrire assez précisément les propriétés grâce au théorème des fonctions implicites.

Nous revenons à l'opérateur $\Gamma(E)$ en appliquant la transformation de dualité (2.7). On voit que les suites

$$\varphi_{\mathcal{E}(\alpha)}(\alpha, x) = e^{2\pi i \alpha x} \sum_{y=1}^q e^{2\pi i \omega x y} \Phi(\alpha, \mathcal{E}(\alpha); y), \quad \alpha \in [0, 1)$$

sont solutions de l'équation $\Gamma(E)\varphi_{\mathcal{E}(\alpha)} = 0$ pour tout $\alpha \in [0, 1)$.

L'identité de la résolvante donne alors que la suite

$$u_{\mathcal{E}(\alpha)}(X) = - \sum_{y=-\infty}^{\infty} g_0(X, (0, y); \mathcal{E}(\alpha)) \varphi_{\mathcal{E}(\alpha)}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha); y) \quad (2.13)$$

est solution de l'équation :

$$hu_{\mathcal{E}(\alpha)} = \mathcal{E}(\alpha)u_{\mathcal{E}(\alpha)}.$$

Ainsi, d'après le lemme 2, $\mathcal{E}(\alpha) \in \sigma(h)$ pour tout $\alpha \in [0, 1)$.

Il nous reste à démontrer que la mesure spectrale de l'opérateur h est absolument continue sur l'ensemble $\mathcal{E}([0, 1))$.

2.4 Complétude locale des états de surface

Soit $\mathcal{E}_h(dE)$ la famille spectrale de l'opérateur h . D'après le théorème spectral (voir [14]), la résolvante $R_h(z)$ est la transformée de Borel de $\mathcal{E}_h(dE)$:

$$R_h(z) = \int \frac{\mathcal{E}_h(dE)}{E - z}.$$

Soit $\{e_X(Y) = \delta(Y - X) \mid Y \in \mathbb{Z}^d\}$ la base hilbertienne canonique de $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ et soit $\rho_X(dE)$ la mesure spectrale associée au vecteur e_X de cette base canonique :

$$\rho_X(dE) = \langle \mathcal{E}_h(dE)e_X, e_X \rangle.$$

C'est une mesure réelle et positive sur \mathbb{R} . On peut exprimer $\rho_X(dE)$ via $R_h(z)$ par les formules d'inversion. Pour tout intervalle $\Delta \subset \mathbb{R}$ et tout $X \in \mathbb{Z}^d$:

$$\langle \mathcal{E}_h(\Delta)e_X, e_X \rangle = \lim_{\nu \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \operatorname{Im} g(X, X; E + i\nu) dE.$$

En particulier, si la composante absolument continue de $\rho_X(dE)$ est non-nulle sur un intervalle Δ , nous pouvons calculer sa densité $r_X(E)$ par la formule :

$$r_X(E) = \lim_{\nu \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} g(X, X; E + i\nu).$$

Pour calculer cette limite nous appliquons encore une fois le lemme 1 et l'identité (2.1). Il résulte de cette identité que

$$\lim_{\nu \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} g(X, X; E + i\nu) = - \lim_{\nu \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \langle \Gamma^{-1} W \varphi_X, W \varphi_X \rangle (E + i\nu)$$

où $\Gamma(z)$ est défini au lemme 1 et $\varphi_X(z)$ est le vecteur dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ dont les composantes sont données par :

$$\varphi_X(y; z) = g_0(X, (0, y); z), \quad z = E + i\nu.$$

On pose : $\varphi_1 = W \varphi_X$. Ensuite, la transformation de dualité permet de passer de l'opérateur $\Gamma(E)$ à l'opérateur $H_\varepsilon(\alpha, E)$:

$$\langle \Gamma^{-1}(E + i\nu) \varphi_1(E), \varphi_1(E) \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z}^1)} = \int_0^1 d\alpha \langle H_\varepsilon^{-1}(\alpha, E + i\nu) \tilde{\varphi}_1(\alpha, E), \tilde{\varphi}_1(\alpha, E) \rangle_{\ell^2([1, q])}$$

où

$$\tilde{\varphi}_1(\alpha, E; z) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x(\omega z + \alpha)} \varphi_1(E; x).$$

La forme de la fonction $V(\alpha, E)$ nous permet de calculer la limite

$$\lim_{\nu \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int d\alpha \langle H_\varepsilon^{-1}(\alpha; E + i\nu) \tilde{\varphi}_1(\alpha, E), \tilde{\varphi}_1(\alpha, E) \rangle$$

pour tout $E \in \mathcal{E}([0, 1])$, à un nombre fini d'exceptions près. On trouve que, comme fonction de E , la densité de la mesure spectrale s'écrit :

$$r_X(E) dE = |u_E(X)|^2 \gamma'(E)$$

où $\gamma(E)$ est la quasi-impulsion.

Ceci termine la description schématique des démonstrations.

3 Démonstration du théorème 1 : le spectre surfacique

Comme nous l'avons déjà expliqué, l'identité de la résolvante nous ramène tout d'abord au problème spectral réduit (2.6) pour l'opérateur $\Gamma(E)$ défini au lemme 1. Puis, la transformation de dualité (2.7) nous conduit au problème associé (2.9) et au problème spectral correspondant (2.11) relatif à l'opérateur $H_\varepsilon(\alpha, E)$.

Dans cette section nous étudions en détail le spectre de cet opérateur $H_\varepsilon(\alpha, E)$ et nous en déduisons l'existence et les propriétés de la loi de dispersion des états de surface de l'opérateur h .

3.1 Résultats perturbatifs : propositions 1 et 2

Nous allons énoncer deux propositions qui portent sur les valeurs propres et les fonctions propres dans deux cas perturbatifs différents :

- perturbation du spectre ponctuel sans résonance (proposition 1),
- perturbation avec résonance (proposition 2).

Nous donnons des schémas de démonstration de ces deux propositions aux paragraphes 5.1 et 5.2, car nous en utilisons certains points. L'opérateur $H_\varepsilon(\alpha, E)$ s'écrit

$$H_\varepsilon(\alpha, E) = \varepsilon\Delta + V(\alpha, E) \quad (3.1)$$

où $V(\alpha, E)$ est l'opérateur de multiplication par la suite

$$\{V(\alpha + \omega x; E)\}_{x=1, \dots, q}$$

définie par (2.10). Si le paramètre ε est assez petit on peut considérer l'opérateur $\varepsilon\Delta$ comme une perturbation de l'opérateur $V(\alpha, E)$. Il est immédiat que le spectre de $V(\alpha, E)$ est formé des points

$$\bar{\lambda}_k(\alpha, E) = V(\alpha + \omega k, E), \quad 1 \leq k \leq q,$$

et que les fonctions propres correspondantes sont

$$\bar{\psi}_k(x) = \delta(x - k), \quad 1 \leq k \leq q.$$

Pour abrégier les notations, nous allons omettre les paramètres α et E dans les énoncés et démonstrations des deux propositions qui suivent. Nous reviendrons plus loin à l'étude du comportement des valeurs propres de $H_\varepsilon(\alpha, E)$ en fonction de α et de E . Notons

$$f_k = (H_\varepsilon - \bar{\lambda}_k)\bar{\psi}_k.$$

Il n'est pas difficile de trouver que :

$$f_k(y) = \begin{cases} -\varepsilon & \text{si } y = k \pm 1, \\ 0 & \text{si } y \neq k \pm 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Il s'ensuit que

$$|(H_\varepsilon \bar{\psi}_k)(x) - \bar{\lambda}_k \bar{\psi}_k(x)| \leq \varepsilon$$

pour tout $x \in [1, q]$. Cette inégalité nous autorise à appeler les $\bar{\lambda}_k$ les *valeurs propres approchées* de l'opérateur $H_\varepsilon(\alpha, E)$ et les $\bar{\psi}_k$ les *fonctions propres approchées* correspondantes.

Définition 2. Soit $\bar{\lambda}_k$ une valeur propre approchée de l'opérateur $H_\varepsilon(\alpha, E)$. Nous dirons qu'elle est *non résonante* si pour tout $j \neq k$:

$$|\bar{\lambda}_k - \bar{\lambda}_j| \geq \varepsilon^{1/2}. \quad (3.3)$$

Définition 3. Soient $\bar{\lambda}_{k_1}$ et $\bar{\lambda}_{k_2}$ deux valeurs propres approchées de H_ε . Nous dirons qu'elles forment une *paire résonante* si

(i) pour tout $j \neq k_1, k_2$,

$$|\bar{\lambda}_{k_i} - \bar{\lambda}_j| \geq \frac{1}{2} \cdot \varepsilon^{1/2}, \quad i = 1, 2 \quad (3.4)$$

(ii)

$$|\bar{\lambda}_{k_1} - \bar{\lambda}_{k_2}| \leq \varepsilon^{1/2}. \quad (3.5)$$

Proposition 1 (perturbation sans résonance). Soit $\bar{\lambda}_k$ une valeur propre approchée non résonante. L'opérateur H_ε a alors une valeur propre exacte λ_k , et une fonction propre associée ψ_k telle que :

$$\psi_k = \bar{\psi}_k + \delta\psi_k + \delta\delta\psi_k \quad (3.6)$$

où

$$\begin{aligned} \delta\psi_k &= \sum_{i \neq k} \frac{\langle (H_\varepsilon - \bar{\lambda}_k)\bar{\psi}_k, \bar{\psi}_i \rangle}{\bar{\lambda}_k - \bar{\lambda}_i} \cdot \bar{\psi}_i \\ |\delta\delta\psi_k(x)| &\leq \varepsilon^2, \quad \forall x \in [1, q]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

La valeur propre λ_k vérifie :

$$|\lambda_k - \bar{\lambda}_k| \leq \text{const} \cdot \varepsilon^{3/2}.$$

Démonstration. Elle fait l'objet du paragraphe 5.1. \square

Proposition 2 (perturbation avec résonance). Supposons que les deux valeurs propres approchées $\bar{\lambda}_{k_1}$ et $\bar{\lambda}_{k_2}$ de l'opérateur H_ε forment une paire résonante. L'opérateur H_ε a alors deux valeurs propres $\lambda_{k_1 k_2}^\pm$, et deux fonctions propres associées $\psi_{k_1 k_2}^\pm$ telles que

$$\psi_{k_1 k_2}^\pm = A_\pm \bar{\psi}_{k_1} + B_\pm \bar{\psi}_{k_2} + \delta\psi_{k_1 k_2}^\pm + \delta\delta\psi_{k_1 k_2}^\pm \quad (3.8)$$

où

$$\begin{aligned} \delta\psi_{k_1 k_2}^\pm &= A_\pm \sum_{j \neq k_1, k_2} \frac{\langle f_{k_1}, \bar{\psi}_j \rangle}{\bar{\lambda}_{k_1} - \bar{\lambda}_j} \bar{\psi}_j + B_\pm \sum_{j \neq k_1, k_2} \frac{\langle f_{k_2}, \bar{\psi}_j \rangle}{\bar{\lambda}_{k_2} - \bar{\lambda}_j} \bar{\psi}_j \\ |\delta\delta\psi_{k_1 k_2}^\pm(x)| &\leq \varepsilon^2, \quad \forall x \in [1, q] \end{aligned}$$

et où la matrice formée par les coefficients A_\pm et B_\pm est "presque" orthogonale :

$$\begin{aligned} |A_+^2 + B_+^2 - 1| &\leq \varepsilon^2; \\ |A_-^2 + B_-^2 - 1| &\leq \varepsilon^2; \\ |A_+ A_- + B_+ B_-| &\leq \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Les valeurs propres $\lambda_{k_1 k_2}^\pm$ vérifient les inégalités :

$$\left| \lambda_{k_1 k_2}^\pm - \left\{ \frac{\bar{\lambda}_{k_1} + \bar{\lambda}_{k_2}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\bar{\lambda}_{k_1} - \bar{\lambda}_{k_2})^2 - 4f_{k_1}^2(k_2)} \right\} \right| \leq \text{const} \cdot \varepsilon^{3/2}$$

Démonstration. Elle fait l'objet du paragraphe 5.2. \square

3.2 Les fonctions $\Lambda(\alpha, E)$, $\Phi(\alpha, E)$, $\mathcal{E}(\alpha)$

Les propositions 1 et 2 permettent de calculer les valeurs propres de l'opérateur $H_\varepsilon(\alpha, E)$ pour toutes les valeurs des paramètres α et E . Pour étudier les propriétés différentielles du spectre comme fonction de α et de E , nous allons utiliser une représentation du spectre introduite par Ya. Sinai dans [16].

Fixons pour l'instant le paramètre E . Nous allons définir deux transformations, l'une par rapport au paramètre α :

$$\mathcal{R}_\omega \alpha = \alpha + \omega \pmod{1},$$

l'autre par rapport à $x \in \mathbb{Z}$:

$$Tx = x + 1.$$

Nous allons noter par la même lettre T l'opération induite dans l'espace des suites périodiques de période q :

$$(T\psi)(x) = \psi(x + 1).$$

Remarquons maintenant, que si une suite $\psi(x)$ est fonction propre de l'opérateur $H_\varepsilon(\alpha, E)$ pour la valeur propre λ , alors la suite $(T\psi)(x)$ est fonction propre de l'opérateur $H_\varepsilon(\alpha + \omega, E)$ pour la même valeur propre λ . Le spectre de l'opérateur H_ε est donc invariant par le déplacement \mathcal{R}_ω du paramètre α :

$$\sigma(H_\varepsilon(\alpha, E)) = \sigma(H_\varepsilon(\mathcal{R}_\omega \alpha, E)).$$

Il s'avère même qu'il est possible de trouver deux fonctions $\Lambda(\alpha, E)$ et $\Phi(\alpha, E)$ telles que, pour tout $\alpha \in [0, 1/q]$ et pour tout $E \in \tilde{I}$, les valeurs propres et les fonctions propres associées de $H_\varepsilon(\alpha, E)$ soient données par :

$$\begin{aligned} \{\lambda_m(\alpha, E) = \Lambda(\mathcal{R}_\omega^m \alpha, E)\}_{m=1, \dots, q}, \\ \{\psi_m(\alpha, E) = T^{-m} \Phi(\mathcal{R}_\omega^m \alpha, E)\}_{m=1, \dots, q}. \end{aligned}$$

Nous allons aussi étudier la fonction $\mathcal{E}(\alpha)$ définie de façon implicite par :

$$\Lambda(\alpha, \mathcal{E}(\alpha)) \equiv 0.$$

3.2.1 Les fonctions $\Lambda_0(\alpha, E)$, $\Phi_0(\alpha, E)$ et $\mathcal{E}_0(\alpha)$ pour l'opérateur $V(\alpha, E)$

Le principe de la construction des fonctions $\Lambda(\alpha, E)$, $\Phi(\alpha, E)$ et $\mathcal{E}(\alpha)$ consiste à utiliser les propositions 1 et 2. Nous prendrons pour opérateur non-perturbé $H_0(\alpha, E) = V(\alpha, E)$, l'opérateur de multiplication par la suite $\{V(\alpha + k\omega, E)\}_{k=1, \dots, q}$.

Nous commençons par définir les fonctions $\Lambda_0(\alpha, E)$, $\Phi_0(\alpha, E)$ et $\mathcal{E}_0(\alpha)$ pour l'opérateur $H_0(\alpha, E)$. Il est facile de voir que dans ce cas $\Phi_0(\alpha, E) \equiv \delta_0$ et que $\Lambda_0(\alpha, E) \equiv V(\alpha, E)$ pour tout $\alpha \in [0, 1)$. La fonction $\mathcal{E}_0(\alpha)$ est alors déterminée par l'équation :

$$1 - \frac{C}{\sqrt{(\mathcal{E}_0(\alpha) - 2 \cos 2\pi\alpha)^2 - 4}} = 0.$$

Il en résulte que

$$\mathcal{E}_0(\alpha) = \sqrt{C^2 + 4} + 2 \cos 2\pi\alpha, \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (3.9)$$

Ainsi, pour tout $\alpha \in [0, 1/q)$ et tout $E \in \tilde{I}$, le spectre de l'opérateur H_0 s'écrit :

$$\sigma(H_0) = \bigcup_{k=0}^{q-1} \Lambda_0(\mathcal{R}_\omega^k \alpha, E)$$

et l'ensemble des fonctions propres correspondantes est

$$\bigcup_{k=0}^{q-1} T^{-k} \Phi_0(\mathcal{R}_\omega^k \alpha, E).$$

L'ensemble des valeurs du paramètre E pour lesquelles 0 est dans le spectre est

$$\bigcup_{k=0}^{q-1} \mathcal{E}_0(\mathcal{R}_\omega^k \alpha).$$

3.2.2 Schéma de construction des fonctions $\Lambda(\alpha, E)$, $\Phi(\alpha, E)$ et $\mathcal{E}(\alpha)$

Nous cherchons maintenant à construire des fonctions $\Lambda(\alpha, E)$ et $\Phi(\alpha, E)$ telles que, pour toutes valeurs (α, E) des paramètres, $\Lambda(\alpha, E)$ soit une valeur propre de $H_\varepsilon(\alpha, E)$ et $\Phi(\alpha, E)$ soit une fonction propre associée. Ces conditions ne définissent pas ces deux fonctions $\Lambda(\alpha, E)$ et $\Phi(\alpha, E)$ de manière unique. Nous allons construire ces fonctions, en évaluant l'effet de la perturbation $-\varepsilon\Delta$ sur le spectre de l'opérateur $H_0(\alpha, E)$ et, en particulier, sur les fonctions $\Lambda_0(\alpha, E)$ et $\Phi_0(\alpha, E)$.

Pour trouver la valeur propre $\Lambda(\alpha, E)$ de l'opérateur $H_\varepsilon(\alpha, E)$ en utilisant les propositions 1 et 2, il faudra, pour chaque α et chaque E , savoir si la valeur propre $\Lambda_0(\alpha, E)$ de l'opérateur $H_0(\alpha, E)$ est résonante ou non résonante par rapport aux autres valeurs propres

$$\Lambda_0(\alpha + k\omega, E), \quad k = 1, \dots, q-1.$$

Ceci nous conduit à partager l'intervalle $[0, 1]$ en la partie formée des α qui sont des valeurs résonantes et en la partie formée des α qui sont des valeurs non résonantes. Nous allons montrer plus loin, grâce aux propriétés de la fonction $V(\alpha, E)$, que l'ensemble des α résonants est la réunion de $2q - 2$ intervalles disjoints. L'ensemble des α non résonants en est le complémentaire. Dans la suite nous parlerons de la partition de l'intervalle $[0, 1]$ en *zones de résonance* et en *zones sans résonance*.

Pour les α dans les zones de résonance, nous allons construire la fonction $\Lambda(\alpha, E)$ grâce à la proposition 2, alors que, pour les α dans les zones sans résonance, nous allons la construire grâce à la proposition 1. Discutons plus en détail le cas de résonance et le mécanisme d'apparition des lacunes dans l'ensemble des valeurs de la fonction $\Lambda(\alpha, E)$, i.e. des zones où cette fonction ne prend aucune valeur.

Soit E fixé. Si α est dans l'une des zones de résonance, alors, dans le spectre de l'opérateur $H_0(\alpha, E)$, il y a deux valeurs propres $\bar{\lambda}_0(\alpha) = \Lambda_0(\alpha, E)$ et $\bar{\lambda}_k(\alpha) = \Lambda_0(\alpha + \omega k, E)$ proches l'une de l'autre. La partition que nous choisissons garantit que ces deux valeurs propres sont très éloignées des autres valeurs propres, i.e. des $\Lambda_0(\alpha + \omega l, E)$ pour $l \neq 0, k$. Nous allons voir que si ε est assez petit, on peut calculer en première approximation l'effet de la perturbation $-\varepsilon\Delta$ sur $\bar{\lambda}_0$ et $\bar{\lambda}_k$ en ignorant toutes les autres valeurs propres. C'est un argument fréquent en physique quantique. Il permet de traiter, en première approximation, de nombreux systèmes comme des systèmes à deux niveaux.

Dans notre cas cela signifie que nous obtenons deux valeurs propres $\lambda_0(\alpha, E)$ et $\lambda_k(\alpha, E)$ comme valeurs propres $\mu_{\pm}(\alpha, E)$ d'une matrice $S = \|s_{ij}\|_{i,j=1,2}$ de taille 2×2 (voir la proposition 2 et sa démonstration). Lors de la démonstration de la proposition 2 nous obtenons pour $\mu_{\pm}(\alpha, E)$ des expressions du type :

$$\mu_{\pm} = \frac{s_{11} + s_{22}}{2} \pm \sqrt{(s_{11} - s_{22})^2 + 4s_{12}s_{21}}.$$

Le comportement de ces deux valeurs propres, tracé schématiquement sur la figure 2,

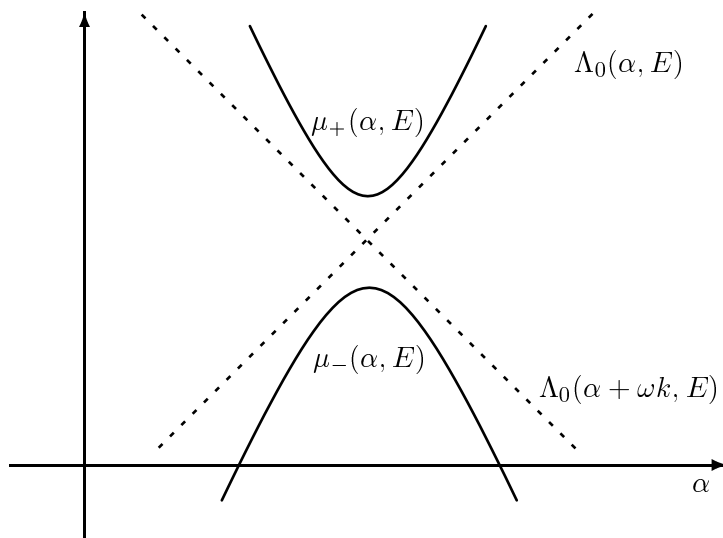


Figure 2: Graphes de $\mu_{\pm}(\alpha, E)$ comme fonctions de α , E étant fixé

correspond à ce que l'on observe en étudiant la perturbation d'un système à deux niveaux. On voit, en particulier, qu'une lacune se forme si $\min_{\alpha} \mu_+(\alpha, E) - \max_{\alpha} \mu_-(\alpha, E) > 0$. Une analyse précise du comportement de la racine

$$\sqrt{(s_{11} - s_{22})^2 + 4s_{12}s_{21}}$$

en fonction de α nous permet de démontrer que

$$\min_{\alpha} \mu_+(\alpha, E) - \max_{\alpha} \mu_-(\alpha, E) > 0,$$

ce qui équivaut à dire que l'intervalle $[\max_{\alpha} \mu_{-}(\alpha, E), \min_{\alpha} \mu_{+}(\alpha, E)]$ est une lacune dans l'ensemble des valeurs de la fonction $\Lambda(\alpha, E)$. Nous obtenons également une estimation de la longueur de chaque lacune.

Ainsi, la conséquence la plus importante du phénomène de résonance est la discontinuité de la fonction $\Lambda(\alpha, E)$.

Il est très important de contrôler à cette étape le comportement de diverses notions en fonction du paramètre E . En particulier, les intervalles de la partition pourraient aussi en dépendre, ce qui compliquerait beaucoup les calculs. Nous allons veiller tout particulièrement à choisir la partition de façon qu'elle soit indépendante de E , tout en conservant les estimations nécessaires.

Le lemme 3 porte sur la partition \mathcal{P} de l'intervalle $[0, 1)$ et sur les propriétés des fonctions $\Lambda(\alpha, E)$ et $\Phi(\alpha, E)$.

Lemme 3. *Soit $H_{\varepsilon}(\alpha, E)$ l'opérateur défini par l'expression (3.1) dans l'espace des suites périodiques de période q . Soit*

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{10 \cdot q^4}.$$

On suppose que $\varepsilon < \varepsilon_0$.

1. *Il existe une partition \mathcal{P} de l'intervalle $[0, 1)$ indépendante de E qui contient $2q - 2$ zones de résonance disjointes O_k^{\pm} pour $k = 1, \dots, q - 1$ et $2q - 1$ zones sans résonance U_j pour $j = 1, \dots, 2q - 1$. Elles sont telles que*

$$[0, 1) \setminus \bigcup_{k=1}^{q-1} O_k^{\pm} = \bigcup_{j=1}^{2q-1} U_j.$$

2. *Il existe deux fonctions $\Lambda(\alpha, E)$ et $\Phi(\alpha, E)$ définies sur $[0, 1) \times \tilde{I}$ telles que, pour toutes valeurs (α, E) des paramètres telles que $\alpha \in [0, 1)$ et $E \in \tilde{I}$, on ait :*

2.1. *$\Lambda(\alpha, E)$ est une valeur propre de l'opérateur $H_{\varepsilon}(\alpha, E)$ et $\Phi(\alpha, E)$ est une fonction propre relative à cette valeur propre;*

2.2. *l'ensemble*

$$\{\lambda_k(\alpha, E) = \Lambda(\alpha + \omega k, E)\}_{k=0, \dots, q-1}$$

est l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur $H_{\varepsilon}(\alpha, E)$ et

$$\{\psi_k(\alpha, E) = T^{-k} \Phi(\alpha + \omega k, E)\}_{k=0, \dots, q-1}$$

est l'ensemble des fonctions propres associées à ces valeurs propres.

3. *Pour tout $E \in \tilde{I}$ fixé, les fonctions $\Lambda(\alpha, E)$ et $\Phi(\alpha, E)$ ont les propriétés suivantes :*

3.1. *elles sont continues par morceaux en $\alpha \in [0, 1)$;*

3.2. *la fonction $\Lambda(\alpha, E)$ est de classe C^2 en α sur chaque intervalle de la partition \mathcal{P} ;*

3.3. *pour tout $(\alpha, E) \in [0, 1) \times \tilde{I}$,*

$$\left| \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha}(\alpha, E) \right| < \text{const} < \infty \text{ et } \left| \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \alpha^2}(\alpha, E) \right| < \text{const} \cdot \varepsilon^{-2} < \infty.$$

3.4. Sur chaque intervalle U_j sauf ceux qui contiennent les points $\alpha = 0$ et $\alpha = 1/2$, la fonction $\Lambda(\alpha, E)$ est monotone, croissante ou décroissante. Sur chaque zone de résonance et sur les deux intervalles U_j qui contiennent les points $\alpha = 0$ et $\alpha = 1/2$ elle a un extremum, maximum ou minimum. Au voisinage de chaque point d'extremum elle est telle que :

$$\text{si } \left| \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha}(\alpha, E) \right| \leq \text{const} \cdot \varepsilon^{3/2}, \text{ alors } \left| \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \alpha^2}(\alpha, E) \right| \geq \text{const} \cdot \varepsilon^{-1/2}.$$

3.5. L'image de l'intervalle $[0, 1)$ par la fonction $\Lambda(\alpha, E)$ est la réunion d'un nombre fini d'intervalles disjoints

$$\Lambda([0, 1), E) = \bigcup_{k=1}^q [\lambda_k^-(E), \lambda_k^+(E)]$$

tels que, pour tout $k = 1, \dots, q-1$, on ait :

$$\lambda_k^+(E) - \lambda_{k+1}^-(E) \geq \varepsilon^2$$

uniformément en $E \in \tilde{I}$.

4. Pour tout α fixé,

4.1. il existe deux constantes positives $\frac{1}{C} < v_1 < v_2 < \infty$ telles que

$$v_2 \leq \frac{\partial \Lambda}{\partial E}(\alpha, E) \leq v_1;$$

$$4.2. \quad \left| \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial E^2}(\alpha, E) \right| < \text{const} < \infty$$

$$4.3. \quad \left| \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \alpha \partial E}(\alpha, E) \right| < \text{const} < \infty.$$

Démonstration. L'existence de la partition \mathcal{P} est établie au paragraphe 3.3.1. Le reste de la démonstration est donné au paragraphe 3.3.2 pour le cas non résonant et au paragraphe 3.3.3 pour le cas résonant. \square

La figure 3 représente de façon schématique le graphe de la fonction $\alpha \mapsto \Lambda(\alpha, E)$, pour E fixé.

Une fois introduite la fonction $\Lambda(\alpha, E)$, le lemme 4 donne l'existence et les propriétés de la loi de dispersion $\mathcal{E}(\alpha)$.

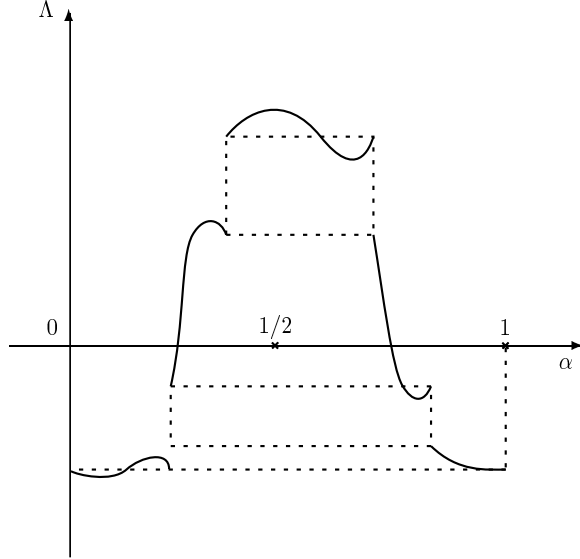


Figure 3: Graphe de $\Lambda(\alpha, E)$ pour $0 \leq \alpha < 1$, E étant fixé

Lemme 4. Soit $\Lambda(\alpha, E)$ la fonction définie au lemme précédent. Il existe une fonction $\mathcal{E}(\alpha)$ définie implicitement sur l'intervalle $[0, 1)$ par l'équation

$$\Lambda(\alpha, \mathcal{E}(\alpha)) \equiv 0.$$

Cette fonction est continue par morceaux. Ses intervalles de continuité sont définis par la partition \mathcal{P} définie au lemme précédent.

Sur chaque intervalle de la partition \mathcal{P} la fonction $\mathcal{E}(\alpha)$ est de classe C^2 et ses dérivées vérifient :

1°. $|\mathcal{E}'(\alpha)| \leq \text{const}$, pour tout $\alpha \in [0, 1)$;

2°. $|\mathcal{E}''(\alpha)| \leq \varepsilon^{-2}$, pour tout $\alpha \in [0, 1)$;

3°. $\mathcal{E}(\alpha)$ a exactement $2q$ points critiques : q maxima et q minima. Les points critiques sont tous non-dégénérés. Au voisinage de chacun d'eux on a la propriété suivante :

$$\text{si } |\mathcal{E}'(\alpha)| < \varepsilon^{3/2}, \text{ alors } |\mathcal{E}''(\alpha)| > \varepsilon^{-1/2}.$$

4°. L'image de l'intervalle $[0, 1)$ par la fonction $\mathcal{E}(\alpha)$ est contenue dans l'intervalle I :

$$\mathcal{E}([0, 1)) \subset I.$$

C'est la réunion de q intervalles disjoints :

$$\mathcal{E}([0, 1)) = \bigcup_{k=1}^q [a_k, b_k],$$

et, pour tout $k = 1, \dots, q - 1$,

$$a_{k+1} - b_k > \text{const} \cdot \varepsilon^2.$$

La figure 4 représente de façon schématique le graphe de la fonction $\mathcal{E}(\alpha)$.

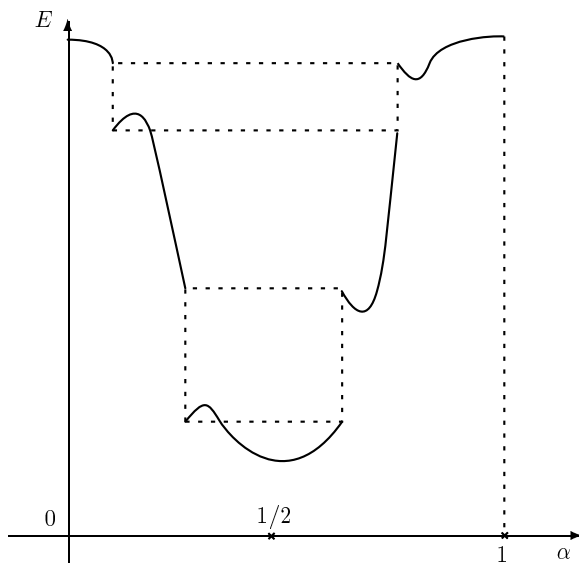


Figure 4: Graphe de $\mathcal{E}(\alpha)$

Démonstration. Elle fait l'objet de la section 3.4. □

3.3 Démonstration du lemme 3

3.3.1 Partition \mathcal{P} de l'intervalle $[0, 1]$

En accord avec la section 3.1 nous prenons dans la suite comme ensemble des valeurs propres approchées de l'opérateur $H_\varepsilon(\alpha, E)$ l'ensemble suivant :

$$\bar{\lambda}_k(\alpha, E) = \Lambda_0(\alpha + \omega k, E), \quad k = 0, \dots, q - 1.$$

Les fonctions propres approchées correspondantes sont :

$$\bar{\psi}_k(\alpha, E) = \delta(\cdot - k), \quad k = 0, \dots, q - 1.$$

Soit Π_k l'ensemble de points α tels que $V(\alpha, E) = V(\alpha + \omega k, E)$. L'ensemble Π_k consiste en deux points α_k^\pm qui sont faciles à calculer, grâce à l'expression (2.10) de la fonction $V(\alpha, E)$:

$$\alpha_k^\pm = 1/2 \pm \frac{k}{2q} \pmod{1}, \quad k = 1, \dots, q - 1. \quad (3.10)$$

Il résulte aussitôt de (3.10) que

$$|\alpha_k - \alpha_m| \geq \frac{1}{2q}, \quad \forall m \neq k. \quad (3.11)$$

Il est important que ces points ne dépendent pas du paramètre E . Cela nous permet de choisir une partition indépendante de E . Notons en effet

$$O_k^{(\pm)} = \{\alpha \mid |\alpha - \alpha_k^\pm| < \frac{q}{8k} \cdot \sqrt{\varepsilon}\}, \quad k = 1, \dots, q-1. \quad (3.12)$$

Il est facile de montrer, à partir de la forme de la fonction $V(\alpha, E)$, que, si α appartient à l'un de ces voisinages, par exemple à $O_k^{(\pm)}$, alors deux valeurs propres approchées de l'opérateur $H_\varepsilon(\alpha, E)$ forment une paire de résonance pour tout $E \in \tilde{I}$. A savoir,

$$|\Lambda_0(\alpha, E) - \Lambda_0(\alpha + \omega k, E)| \leq \sqrt{\varepsilon}, \quad \forall \alpha \in O_k^\pm; \quad \forall E \in \tilde{I}. \quad (3.13)$$

Nous appellerons ces voisinages *zones de résonance*.

Définissons ε_0 par :

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{10 \cdot q^4}. \quad (3.14)$$

Il résulte alors de (3.11) que, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, les zones de résonance sont toutes disjointes. Ce fait est important. Il nous garantit que, si $\alpha \in O_k^\pm$, les valeurs approchées $\bar{\lambda}_0$ et $\bar{\lambda}_k$ étant proches l'une de l'autre (voir l'inégalité (3.13)), sont loin des autres valeurs propres approchées :

$$|\Lambda_0(\alpha, E) - \Lambda_0(\alpha + \omega j, E)| > \sqrt{\varepsilon}, \quad \forall j \neq 0, k.$$

Le complémentaire de la réunion des zones de résonance est, à son tour, réunion d'intervalles disjoints. C'est l'ensemble des points non résonnants.

En effet, on peut voir que si $\alpha \notin \bigcup_{k=1}^q O_k^\pm$, alors pour tout $E \in \tilde{I}$ et pour tout $j = 1, \dots, q$ on a :

$$|\Lambda_0(\alpha, E) - \Lambda_0(\alpha + \omega j, E)| > \sqrt{\varepsilon}. \quad (3.15)$$

La partition de l'intervalle $[0, 1]$ est ainsi bien définie. Nous allons passer à la construction des fonctions $\Lambda(\alpha, E)$ et $\Phi(\alpha, E)$.

3.3.2 Construction de $\Lambda(\alpha, E)$ et $\Phi(\alpha, E)$: le cas non résonnant

Supposons que $\alpha \notin O_1^\pm \cup \dots \cup O_{q-1}^\pm$. Alors, pour tout $E \in \tilde{I}$, compte tenu de (3.15), la valeur propre approchée $\bar{\lambda}_0(\alpha, E)$ est non résonnante. D'après la proposition 1, l'opérateur $H_\varepsilon(\alpha, E)$ a une valeur propre exacte que nous notons $\mu(\alpha, E)$ et une fonction propre exacte $\psi(\alpha, E)$ définie par les expressions (3.6)-(3.7).

Il résulte de la démonstration de la proposition 1 (voir plus loin le paragraphe 5.1) que $\mu(\alpha, E)$ est solution de l'équation :

$$\mu(\alpha, E) = \bar{\lambda}_0(\alpha, E) - \varepsilon(x_1(\alpha, E; \mu(\alpha, E)) + x_{q-1}(\alpha, E; \mu(\alpha, E))) \quad (3.16)$$

où x_1, x_{q-1} sont des composantes du vecteur X défini par (5.8). Pour $\alpha \notin O_1^\pm \cup \dots \cup O_{q-1}^\pm$, posons

$$\begin{aligned}\Lambda(\alpha, E) &= \mu(\alpha, E); \\ \Phi(\alpha, E) &= \psi(\alpha, E).\end{aligned}$$

Pour alléger les notations, nous allons noter par μ' la dérivée partielle de $\mu(\alpha, E)$ par rapport à α , et par $\dot{\mu}$ sa dérivée partielle par rapport à E . Notons

$$\tilde{x} = x_1(\alpha, E; \mu(\alpha, E)) + x_{q-1}(\alpha, E; \mu(\alpha, E)).$$

Il résulte alors de l'équation (3.16) que

$$\mu' = \frac{\bar{\lambda}'_0 - \varepsilon \tilde{x}'}{1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \mu}} \quad (3.17)$$

et que

$$\mu'' = \frac{1}{1 + \varepsilon \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \mu}} \left\{ \bar{\lambda}''_0 - \varepsilon \tilde{x}'' - 2\varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{x}}{\partial \mu \partial \alpha} \mu' - \varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{x}}{\partial \mu^2} (\mu')^2 \right\}. \quad (3.18)$$

En utilisant l'expression qui définit le vecteur X et les estimations de sa norme (voir la démonstration de la proposition 1) on trouve que

$$\begin{aligned}|\varepsilon \tilde{x}'| &\leq \text{const} \cdot \varepsilon, \\ \left| \varepsilon \cdot \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \mu} \right| &\leq \text{const} \cdot \varepsilon.\end{aligned} \quad (3.19)$$

et que

$$|\varepsilon \tilde{x}''| \leq \text{const} \cdot \varepsilon^{1/2} \quad (3.20)$$

ainsi que

$$\begin{aligned}\left| \varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{x}}{\partial \mu^2} \right| &\leq \text{const} \cdot \varepsilon^{1/2}, \\ \left| \varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{x}}{\partial \alpha \partial \mu} \right| &\leq \text{const} \cdot \varepsilon^{1/2}.\end{aligned}$$

D'où il résulte aussitôt que

$$\begin{aligned}|\mu' - \bar{\lambda}'_0| &\leq \text{const} \cdot \varepsilon; \\ |\mu'' - \bar{\lambda}''_0| &\leq \text{const} \cdot \varepsilon^{1/2}.\end{aligned} \quad (3.21)$$

Remarquons, que sur tous les intervalles considérés ici, sauf sur les deux voisinages des points extrémaux $\alpha = 0$ et $\alpha = 1/2$, la fonction V , et par conséquent $\bar{\lambda}_0(\alpha, E)$, est monotone en α . Il résulte en effet de (3.11) que

$$|\bar{\lambda}'_0| \geq \frac{7}{q}.$$

Comme nous avons choisi ε assez petit (voir (3.14)) nous en déduisons que sur toutes les zones de perturbation sans résonance, sauf sur les deux qui contiennent les points $\alpha = 0$ et $\alpha = 1/2$, la dérivée de μ par rapport à α peut être minorée de la même façon que celle de λ_0 :

$$|\mu'| \geq \text{const} \cdot \frac{1}{q}. \quad (3.22)$$

D'après la définition de la partition \mathcal{P} , les voisinages des points de maximum ($\alpha = 1/2$) et de minimum ($\alpha = 0$) font partie des intervalles de perturbation sans résonance. Montrons que sur chacun de ces intervalles la valeur propre exacte $\mu(\alpha, E)$ a un point d'extremum. Considérons le voisinage du point $\alpha = 1/2$. Soit U_{i_0} la zone sans résonance qui contient le point $\alpha = 1/2$. Les deux zones de résonance les plus proches sont alors les intervalles O_1^- et O_1^+ centrés respectivement aux points $\alpha_1^- = \frac{1}{2} - \frac{1}{2q}$ et $\alpha_1^+ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2q}$. Puisqu'on a choisi ces voisinages assez petits (voir (3.12) et (3.14)) on peut voir que l'intervalle

$$l = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4q}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4q} \right]$$

est inclus dans la zone sans résonance U_{i_0} . Il résulte de la forme de la fonction $V(\alpha, E)$ que la dérivée par rapport à α de $\lambda_0(\alpha, E)$ change de signe quand α varie dans l . Il n'est pas difficile d'estimer la valeur de cette dérivée aux extrémités de l'intervalle l . On obtient que :

$$\left| \lambda'_0\left(1/2 \pm \frac{1}{4q}\right) \right| \geq \text{const} \cdot \frac{1}{4}.$$

Il résulte de l'estimation (3.21) que

$$\begin{aligned} \mu'\left(1/2 - \frac{1}{4q}\right) &\leq \lambda'_0\left(1/2 - \frac{1}{4q}\right) + \varepsilon \\ \mu'\left(1/2 + \frac{1}{4q}\right) &\geq \lambda'_0\left(1/2 + \frac{1}{4q}\right) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Alors, compte tenu du fait que $\varepsilon < \varepsilon_0$ et que ε_0 est défini par (3.14), on en déduit que la dérivée de $\mu(\alpha, E)$ change de signe quand α varie dans la zone U_{i_0} . Le fait que le point où l'extremum est atteint soit unique et non-dégénéré résulte de l'estimation de la dérivée seconde dans (3.21).

Fixons maintenant α et considérons $\mu(\alpha, E)$ comme fonction du paramètre E . D'après la théorie des perturbations classique, cette fonction est différentiable et nous pouvons

calculer sa dérivée en E comme suit :

$$\frac{\partial \mu}{\partial E}(\alpha, E) = \left\langle \frac{\partial V}{\partial E}(\alpha, E) \psi, \psi \right\rangle \quad (3.23)$$

où ψ est la fonction propre correspondante supposée de norme 1. Comme la dérivée de V est de la forme suivante :

$$\frac{\partial V}{\partial E}(\alpha, E) = -\frac{E - 2 \cos(2\pi\alpha)}{((E - 2 \cos(2\pi\alpha))^2 - 4)},$$

il résulte de (3.23) que, pour tout α et pour tout $E \in \tilde{I}$,

$$\frac{\partial \mu}{\partial E}(\alpha, E) < 0.$$

Plus précisément, on a :

$$1 < v_1 = \min_{\alpha, E} \left| \frac{\partial V}{\partial E} \right|(\alpha, E) \leq \left| \frac{\partial \mu}{\partial E} \right|(\alpha, E) \leq \max_{E, \alpha} \left| \frac{\partial V}{\partial E} \right|(\alpha, E) = v_2 < \infty. \quad (3.24)$$

Nous avons ainsi démontré toutes les assertions du lemme 3 dans le cas non résonant.

3.3.3 Construction de $\Lambda(\alpha, E)$ et $\Phi(\alpha, E)$: le cas résonant

Supposons maintenant que $\alpha \in O_k^\pm$ pour un certain k . Remarquons que $O_k^+ = \mathcal{R}_\omega^k O_k^-$. Alors les spectres des opérateurs $H_\varepsilon(\alpha, E)$ et $H_\varepsilon(\alpha + \omega k, E)$ coïncident pour tout $\alpha \in O_k^-$. Si $\alpha \in O_k^-$ alors deux valeurs propres approchées $\bar{\lambda}_0(\alpha, E) = V(\alpha, E)$ et $\bar{\lambda}_k(\alpha, E) = V(\alpha + \omega k, E)$ forment une paire de résonance. Les fonctions propres approchées correspondantes sont $\bar{\psi}_0(\alpha, E) = \delta_0$ et $\bar{\psi}_k(\alpha, E) = \delta_k$. En appliquant la proposition 2 nous obtenons pour $H_\varepsilon(\alpha, E)$ deux valeurs propres exactes et deux fonctions propres correspondantes.

Pour abrégier les notations, nous allons utiliser dans cette section la notation $\mu_\pm(\alpha, E)$ pour désigner deux valeurs propres exactes de l'opérateur $H_\varepsilon(\alpha, E)$, en supposant que α varie dans l'une des zones de résonance. Dans la suite, nous allons surtout nous fixer sur les propriétés de ces valeurs propres comme fonctions des paramètres α et E . C'est pourquoi le numéro de la zone concrète de résonance n'est pas important ici.

Notons que l'opérateur $H_\varepsilon(\alpha + \omega k, E)$ a la même paire de résonance : $\bar{\lambda}_0 = V(\alpha + \omega k, E)$ et $\bar{\lambda}_{q-k} = V(\alpha, E)$ avec respectivement deux fonctions propres approchées correspondantes $\bar{\psi}_0 = \delta_0$ et $\bar{\psi}_{q-k} = \delta_{q-k}$. En appliquant la proposition 2 on voit que l'opérateur $H_\varepsilon(\alpha + \omega k, E)$ a tout à fait les mêmes couples de valeurs propres exactes : $\mu_\pm(\alpha + \omega k, E) = \mu_\pm(\alpha, E)$ et de fonctions propres correspondantes $\psi_\pm(\alpha + \omega k, E) = T^{-k} \psi_\pm(\alpha, E)$. Alors, nous pouvons définir les fonctions $\Lambda(\alpha, E)$ et $\Phi(\alpha, E)$ sur les intervalles O_k^\pm en posant :

$$\Lambda(\alpha, E) = \begin{cases} \mu_+(\alpha, E), & \text{si } \alpha \in O_k^+, \\ \mu_-(\alpha, E), & \text{si } \alpha \in O_k^-, \end{cases}$$

$$\Phi(\alpha, E) = \begin{cases} \psi_+(\alpha, E), & \text{si } \alpha \in O_k^+, \\ \psi_-(\alpha, E), & \text{si } \alpha \in O_k^-. \end{cases}$$

Nous allons maintenant étudier les propriétés différentielles de ces deux valeurs propres. Supposons pour simplifier que $\alpha \in O_k^-$. Alors, comme on l'a établi dans la démonstration de la proposition 2, les valeurs propres $\mu_{\pm}(\alpha, E)$ sont les valeurs propres de la matrice S de taille 2×2 dont les éléments sont définis par (5.20). Les $\mu_{\pm}(\alpha, E)$ sont solutions de l'équation

$$(s_{11} - \mu)(s_{22} - \mu) - s_{12} \cdot s_{21} = 0. \quad (3.25)$$

Elles sont données par :

$$\mu_{\pm} = \frac{s_{11} + s_{22}}{2} \pm \sqrt{(s_{11} - s_{22})^2 + 4s_{12}s_{21}}. \quad (3.26)$$

Considérons la racine carrée $\sqrt{(s_{11} - s_{22})^2 + 4s_{12}s_{21}}$. Ce terme joue un rôle très important dans les estimations qui suivent. En utilisant (5.19) et (5.20) il est facile de montrer que

$$\sqrt{(s_{11} - s_{22})^2 + 4s_{12}s_{21}} \leq \text{const} \cdot \varepsilon^{1/2}. \quad (3.27)$$

Remarquons, que le terme $s_{11} - s_{22}$ change de signe quand α varie dans une zone de résonance. Alors, pour montrer que la racine est toujours strictement positive, il faut étudier le produit

$$4s_{12}s_{21} = 4\varepsilon^2 \tilde{y}_{12} \cdot \tilde{y}_{21}.$$

En analysant la décomposition en série des vecteurs Y_{k_i} (5.18) on peut voir que

$$|\tilde{y}_{12}| > \frac{\varepsilon}{2}; \quad |\tilde{y}_{21}| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

On obtient alors aussitôt que

$$\sqrt{(s_{11} - s_{22})^2 + 4s_{12}s_{21}} \geq \varepsilon^2. \quad (3.28)$$

La dernière estimation est très importante. Il s'ensuit, en particulier, que

$$\max_{\alpha \in O_k^-} \mu_-(\alpha, E) - \min_{\alpha \in O_k^-} \mu_+(\alpha, E) > \varepsilon^2.$$

Cela signifie que dans le domaine des valeurs de la fonction $\Lambda(\alpha, E)$ il se forme une lacune, à savoir l'intervalle

$$(b_{k-1}, a_k) = \left(\max_{\alpha \in O_k^-} \mu_-(\alpha, E), \min_{\alpha \in O_k^-} \mu_+(\alpha, E) \right)$$

dans lequel $\Lambda(\alpha, E)$ ne prend aucune valeur. Il n'est pas difficile de montrer que la longueur de cette lacune vérifie :

$$\varepsilon^2 < a_k - b_{k-1} \leq \text{const} \cdot \varepsilon^{3/2}.$$

La dernière inégalité est une estimation de la longueur de chaque lacune, uniforme par rapport au paramètre E .

Passons à l'étude des dérivées des fonctions $\mu_{\pm}(\alpha, E)$. En dérivant l'expression (3.25) on obtient :

$$\mu' = p \cdot s'_{11} + q \cdot s'_{22} + r \quad (3.29)$$

où

$$p = \frac{s_{22} - \mu}{s_{11} + s_{22} - 2\mu}; \quad q = \frac{s_{11} - \mu}{s_{11} + s_{22} - 2\mu}; \quad r = -\frac{s'_{12}s_{21} + s_{12}s'_{21}}{s_{11} + s_{22} - 2\mu}.$$

Remarquons que

$$\mu_+ - \mu_- = s_{11} + s_{22} - 2\mu_{\pm} = \sqrt{(s_{11} - s_{22})^2 + 4s_{12}s_{21}}. \quad (3.30)$$

Il n'est pas difficile de vérifier que $p + q = 1$, $p > 0$, $q > 0$. En utilisant (3.30), (3.28) ainsi que (5.19) et (5.20) nous montrons que le terme r est petit :

$$|r| < \text{const} \cdot \varepsilon^{1/2}.$$

Compte tenu de la définition des éléments matriciels s_{ij} (voir au paragraphe 5.2 la démonstration de la proposition 2) nous pouvons écrire, sans changer l'ordre de grandeur de r :

$$\mu'_{\pm} = p \cdot \bar{\lambda}'_0 + q \cdot \bar{\lambda}'_k + r.$$

Il s'ensuit que chacun des deux μ_{\pm} a un point d'extremum $\bar{\alpha}_{\pm}(E)$ dans l'intervalle O_k^- tel que $\mu'_{\pm}(\bar{\alpha}_{\pm}(E), E) = 0$ pour tout $E \in \tilde{I}$. Notons que μ_+ a un minimum alors que μ_- a un maximum.

En dérivant (3.29) par rapport à α on trouve que

$$\mu''_{\pm} = p\bar{\lambda}''_0 + q\bar{\lambda}''_k - 2pq \frac{(\bar{\lambda}'_0 - \bar{\lambda}'_k)^2}{s_{11} + s_{22} - 2\mu_{\pm}} + r \quad (3.31)$$

où

$$|r| \leq \text{const} \cdot \varepsilon^{3/2}.$$

Pour estimer μ''_{\pm} on remarque que

$$|p\bar{\lambda}''_0 + q\bar{\lambda}''_k| \leq \max_{\alpha, E} |V''(\alpha, E)|.$$

L'élément essentiel est ici

$$-2pq \frac{(\bar{\lambda}'_0 - \bar{\lambda}'_k)^2}{s_{11} + s_{22} - 2\mu_{\pm}}.$$

Montrons que

$$\varepsilon^{1/2} < |\bar{\lambda}'_0 - \bar{\lambda}'_k| < \text{const}. \quad (3.32)$$

En effet, comme les dérivées de ces deux valeurs propres sont obligatoirement de signes différents, il suffit d'estimer $|\bar{\lambda}'_0|$. On a une majoration évidente : $|\bar{\lambda}'_0| \leq \max_{\alpha, E} |V'(\alpha, E)|$.

L'estimation de gauche résulte du fait que les voisinages de deux points d'extremum de $V(\alpha, E)$ ne font pas partie des intervalles de résonance.

L'estimation de $s_{11} + s_{22} - 2\mu_{\pm}$ suit de (3.30) et de (3.27). On voit alors que

$$\left| 2pq \frac{(\bar{\lambda}'_o - \bar{\lambda}'_k)^2}{s_{11} + s_{22} - 2\mu_{\pm}} \right| \leq \text{const} \cdot \varepsilon^{-2}$$

d'où l'on déduit que

$$|\mu''_{\pm}| \leq \text{const} \cdot \varepsilon^{-2}.$$

Nous venons de montrer que chacune des deux fonctions $\mu_{\pm}(\alpha, E)$ est deux fois dérivable en α et que chacune a un point extrémal dans son intervalle de définition. Montrons que les extrema ne sont pas dégénérés. Pour cela regardons un petit voisinage du point extrémal sur lequel on ait :

$$|\mu'_{\pm}(\alpha, E)| < \varepsilon^{3/2}.$$

Montrons que $|\mu''_{\pm}(\alpha, E)|$ est minoré par une constante strictement positive. Il résulte de (3.30) et de (3.32) que

$$\left| 2pq \frac{(\bar{\lambda}'_o - \bar{\lambda}'_k)^2}{s_{11} + s_{22} - 2\mu_{\pm}} \right| \geq \text{const} \cdot \varepsilon^{-1/2}.$$

On en déduit, compte tenu de (3.31), que

$$|\mu''_{\pm}(\alpha, E)| > \text{const} \cdot \varepsilon^{-1/2}. \quad (3.33)$$

Pour calculer $\dot{\mu}'_{\pm}(\alpha, \mathcal{E}_{\pm}(\alpha))$ et $\ddot{\mu}_{\pm}(\alpha, \mathcal{E}_{\pm}(\alpha))$ nous dérivons l'expression (3.29) ce qui donne :

$$\dot{\mu}'_{\pm} = p\dot{\lambda}'_0 + q\dot{\lambda}'_k - 2pq \frac{(\bar{\lambda}'_o - \bar{\lambda}'_k)(\dot{\lambda}'_o - \dot{\lambda}'_k)}{s_{11} + s_{22} - 2\mu_{\pm}} + r \quad (3.34)$$

$$\ddot{\mu}_{\pm} = p\ddot{\lambda}_0 + q\ddot{\lambda}_k - 2pq \frac{(\ddot{\lambda}_o - \ddot{\lambda}_k)^2}{s_{11} + s_{22} - 2\mu_{\pm}} + r \quad (3.35)$$

avec $|r| < \text{const} \cdot \varepsilon^{3/2}$. Il n'est pas difficile de voir que $\dot{\mu}'_{\pm}$ et $\ddot{\mu}_{\pm}$ peuvent être majorés par des constantes.

3.4 Démonstration du lemme 4

Nous avons maintenant toutes les données nécessaires pour résoudre l'équation :

$$\Lambda(\alpha, \mathcal{E}(\alpha)) = 0, \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (3.36)$$

et pour étudier les propriétés de la fonction $\mathcal{E}(\alpha)$ ainsi définie. En effet, il résulte du lemme 3 que pour tout $\alpha \in [0, 1]$ fixé la dérivée partielle de $\Lambda(\alpha, E)$ par rapport à E est toujours positive. De plus, pour tout α , qu'il soit résonant ou non, $\Lambda(\alpha, E)$ est proche de $\Lambda_0(\alpha, E)$:

$$|\Lambda(\alpha, E) - \Lambda_0(\alpha, E)| < \varepsilon,$$

et cette estimation est uniforme par rapport à E . Comme déjà mentionné, il existe une fonction $\mathcal{E}_0(\alpha)$ définie par (3.9) telle que $\Lambda_0(\alpha, \mathcal{E}_0(\alpha)) \equiv 0$. Il résulte aussitôt du théorème des fonctions implicites que l'équation (3.36) admet une solution, et une seule, $\mathcal{E}(\alpha) \in I$ et que

$$|\mathcal{E}(\alpha) - \mathcal{E}_0(\alpha)| < \varepsilon.$$

Considérons maintenant $\mathcal{E}(\alpha)$ comme fonction implicite. Les dérivées de $\mathcal{E}(\alpha)$ sont de la forme :

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\alpha} = -\frac{\frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha))}{\frac{\partial \Lambda}{\partial E}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha))} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{E}}{d\alpha^2} = & -\frac{1}{\frac{\partial \Lambda}{\partial E}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha))} \left\{ \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \alpha^2}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha)) \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \alpha \partial E}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha)) \cdot \frac{d\mathcal{E}}{d\alpha} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial E^2}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha)) \cdot \left(\frac{d\mathcal{E}}{d\alpha} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Il s'ensuit immédiatement, compte tenu du lemme 3, que

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}'(\alpha)| &\leq \text{const}, & \text{pour tout } \alpha \in [0, 1] \\ |\mathcal{E}''(\alpha)| &\leq \text{const} \cdot \varepsilon^{-2}, & \text{pour tout } \alpha \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Pour étudier plus en détail la structure de la fonction $\mathcal{E}(\alpha)$, nous devons considérer le cas résonant et le cas non résonant. Rappelons que ni les zones de résonance, ni celles sans résonance ne dépendent de E . Alors, les propriétés différentielles de la fonction $\mathcal{E}(\alpha)$ sont définies sur chaque intervalle de la partition \mathcal{P} par la forme de $\Lambda(\alpha, E)$ sur cet intervalle.

3.4.1 Construction de la fonction $\mathcal{E}(\alpha)$: le cas non résonant

Supposons que

$$\alpha \notin O_1^\pm \cup \dots \cup O_{q-1}^\pm.$$

Si l'intervalle considéré n'est pas un des voisinages des points $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, nous savons que $\Lambda(\alpha, E)$ est monotone sur cet intervalle. En même temps, le lemme 3 donne que :

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial E}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha)) > 0$$

pour tout E . Il résulte alors de l'expression (3.37) que sur chaque intervalle où $\Lambda(\alpha, E)$ est monotone en α , $\mathcal{E}(\alpha)$ l'est aussi.

Si l'intervalle considéré est un voisinage d'un point d'extremum de la fonction $V(\alpha, E)$, nous savons que $\Lambda(\alpha, E)$ a un extremum dans cet intervalle. Notons $\bar{\alpha}(E)$ le point de maximum (resp. de minimum) pour un E donné :

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha}(\bar{\alpha}(E), E) \equiv 0, \quad E \in I.$$

Posons $f(E) = \Lambda(\bar{\alpha}(E), E)$. Alors,

$$\frac{df}{dE} = \frac{\partial \Lambda}{\partial E}(\bar{\alpha}(E), E) > 0.$$

Cela fait que la fonction $f(E)$ est monotone. Pour tout α fixé, $\Lambda(\alpha, E)$ est monotone en E et change de signe quand E varie dans l'intervalle I , car, pour tout α , l'équation (3.36) a une solution. Dans le cas de la fonction $f(E)$, quand E varie, $\bar{\alpha}(E)$ varie aussi. Mais, $\bar{\alpha}(E)$ reste toujours dans la même zone de la partition \mathcal{P} . En prenant pour E deux extrémités de l'intervalle I , on peut montrer que $f(E)$ change aussi de signe quand E varie dans I . Elle doit donc avoir un zéro dans cet intervalle. Soit alors E_0 tel que $f(E_0) = \Lambda(\bar{\alpha}(E_0), E_0) = 0$. Posons $\alpha_0 = \alpha(E_0)$. On a alors nécessairement $E_0 = \mathcal{E}(\alpha_0)$. En mettant α_0 dans (3.37) nous obtenons :

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\alpha}(\alpha_0) = 0,$$

ce qui équivaut à dire que $\mathcal{E}(\alpha)$ a aussi un extremum dans le voisinage de l'extremum de $V(\alpha, E)$.

3.4.2 Construction de la fonction $\mathcal{E}(\alpha)$: le cas résonant

Supposons maintenant que $\alpha \in O_k^\pm$ pour un certain k . Pour définir correctement $\mathcal{E}(\alpha)$ sur les zones de résonance, nous allons résoudre les deux équations

$$\mu_\pm(\alpha, \mathcal{E}_\pm(\alpha)) = 0 \tag{3.39}$$

pour $\alpha \in O_k^-$ et nous allons poser :

$$\mathcal{E}(\alpha) = \begin{cases} \mathcal{E}_-(\alpha), & \text{si } \alpha \in O_k^-, \\ \mathcal{E}_+(\alpha - \omega k), & \text{si } \alpha \in O_k^+. \end{cases}$$

Considérons la fonction $\mathcal{E}_\pm(\alpha)$ définie implicitement par l'équation (3.39). Nous avons démontré que dans chaque zone de résonance l'une des fonctions $\mu_\pm(\alpha, E)$ a un point extrémal que nous notons, comme dans le cas non résonant, $\bar{\alpha}_\pm(E)$. Pour ces points on a :

$$\frac{\partial \mu_\pm}{\partial \alpha}(\bar{\alpha}_\pm(E), E) \equiv 0, \quad E \in I.$$

Posons $f_\pm(E) = \mu_\pm(\bar{\alpha}_\pm(E), E)$. Alors, les mêmes arguments que dans le cas non résonant permettent de montrer que chacune des deux fonctions $f_\pm(E)$ est monotone en E et change de signe quand E varie dans l'intervalle I . Ceci nous conduit à la conclusion suivante : chacune des deux fonctions $\mathcal{E}_\pm(\alpha)$ a un seul point d'extremum dans son intervalle de définition.

Nous allons montrer que ces extrema ne sont pas dégénérés en obtenant une estimation analogue à celle du lemme 3 pour les fonctions μ_\pm .

Nous considérons un petit voisinage du point extrémal où l'on ait

$$\left| \frac{d\mathcal{E}_\pm}{d\alpha} \right| < \varepsilon^{3/2}.$$

Il résulte de (3.37) et de l'estimation (3.24) que dans un tel voisinage,

$$|\mu'_\pm(\alpha, \mathcal{E}_\pm(\alpha))| < \text{const} \cdot \varepsilon^{3/2}.$$

L'estimation que nous avons pour $\mu_\pm(\alpha, E)$ donne alors (voir (3.33)) :

$$|\mu''_\pm(\alpha, \mathcal{E}_\pm(\alpha))| > \text{const} \cdot \varepsilon^{-1/2}.$$

Finalement, on déduit de (3.38) que

$$\left| \frac{d^2 \mathcal{E}_\pm}{d\alpha^2} \right| \geq \text{const} \cdot \varepsilon^{-1/2},$$

ce qu'il fallait démontrer.

4 Démonstration du théorème 2 : les états de surface

Nous avons obtenu dans la section précédente la description détaillée du spectre de l'opérateur associé $H_\varepsilon(\alpha, E)$ pour toutes les valeurs des paramètres α et E . Nous avons démontré qu'il existe deux fonctions $\Lambda(\alpha, E)$ et $\Phi(\alpha, E)$ telles que $\Lambda(\alpha, E)$ soit une valeur propre de l'opérateur $H_\varepsilon(\alpha, E)$ et que $\Phi(\alpha, E)$ soit une fonction propre correspondante. L'ensemble

$$\{\lambda_k(\alpha, E) = \Lambda(\alpha + k\omega, E), \psi_k(\alpha, E) = T^{-k}\Phi(\alpha + k\omega, E)\}_{k=0, \dots, q-1}$$

est l'ensemble des valeurs et des fonctions propres de l'opérateur $H_\varepsilon(\alpha, E)$.

4.1 Preuve des points 1 et 2 : les états de surface u_E

Alors, par la transformation de dualité, les suites

$$\varphi_k(\alpha, E; x) = e^{2\pi i(\alpha + \omega k)x} \sum_{z=1}^q e^{2\pi i \omega x z} \psi_k(\alpha, E; z) \quad (4.1)$$

sont solutions de l'équation

$$\Gamma(E)\varphi_k(\alpha, E) = \lambda_k(\alpha, E)\varphi_k(\alpha, E)$$

pour tout $\alpha \in [0, 1)$ et tout $k \in [0, q-1]$.

Fixons un E qui soit une valeur de la fonction $\mathcal{E}(\alpha)$, et soit $\alpha \in [0, 1)$ tel que :

$$E = \mathcal{E}(\alpha).$$

Puisque $\Lambda(\alpha, \mathcal{E}(\alpha)) = 0$, on a :

$$\Gamma(\mathcal{E}(\alpha))\varphi_0(\alpha, \mathcal{E}(\alpha)) = 0.$$

Alors, d'après l'identité de la résolvante, la suite

$$\begin{aligned} u_E(X) &= - \sum_{y=-\infty}^{\infty} g_0(X, (0, y); E)\varphi_0(\alpha, E; y), \\ E &= \mathcal{E}(\alpha), \quad \alpha \in [0, 1) \end{aligned} \tag{4.2}$$

est solution de l'équation :

$$hu_E = Eu_E.$$

On a donc : $\mathcal{E}(\alpha) \in \sigma(h)$ pour tout $\alpha \in [0, 1)$. Autrement dit,

$$\mathcal{E}([0, 1)) \subseteq \sigma(h).$$

Montrons que les fonctions $u_E(X)$ définies dans (4.2) sont des fonctions de type Floquet-Bloch. Posons $E = \mathcal{E}(\alpha)$, $\alpha \in [0, 1)$. Alors,

$$\begin{aligned} u_E(\xi, x + q) &= - \sum_{y=-\infty}^{\infty} g_0(\xi, x + q - y; E)\varphi_0(\alpha, \mathcal{E}(\alpha); y) \\ &= - \sum_{y=-\infty}^{\infty} g_0(\xi, x - y; E)\varphi_0(\alpha, \mathcal{E}(\alpha); y + q). \end{aligned}$$

Il résulte de (4.1) que

$$\varphi_0(\alpha, E; y + q) = e^{2\pi i \alpha q} \varphi_0(\alpha, E; y).$$

Il s'ensuit aussitôt que

$$u_{\mathcal{E}(\alpha)}(\xi, x + q) = e^{2\pi i \alpha q} u_{\mathcal{E}(\alpha)}(\xi, x),$$

ce qui signifie que $u_E(\xi, x)$ est une fonction de Floquet-Bloch en x et que $\gamma(E)$ est la fonction inverse de $\mathcal{E}(\alpha)$, c'est-à-dire que

$$\mathcal{E}(\gamma(E)) \equiv E.$$

On voit ainsi que l'ensemble des valeurs de la fonction $\mathcal{E}(\alpha)$ est obligatoirement inclus dans le spectre de l'opérateur h que nous étudions. Nous avons donc q intervalles séparés par des lacunes.

4.2 Preuve du point 3 : absolue continuité de la mesure spectrale

Il nous reste à montrer que la mesure spectrale de l'opérateur h est absolument continue sur chacun de ces intervalles.

Pour cela, nous étudions la limite suivante

$$\begin{aligned} & \lim_{\nu \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} g(X, X, ; E + i\nu) \\ &= - \lim_{\nu \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \langle W\Gamma^{-1}(E + i\nu)\Gamma_0^{-1}(E + i\nu)\varphi(E + i\nu), \varphi(E + i\nu) \rangle \end{aligned} \quad (4.3)$$

où $\varphi(z, X)$ est le vecteur dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ défini par :

$$\varphi(X, y; z) = g_0(X, (0, y); z), \quad z = E + i\nu.$$

Puisque $\Gamma = \Gamma_0^{-1} + W$, on peut écrire le dernier produit scalaire comme suit :

$$\begin{aligned} & \langle W\Gamma^{-1}(E + i\nu)\Gamma_0^{-1}(E + i\nu)\varphi(E + i\nu), \varphi(E + i\nu) \rangle \\ &= \langle \Gamma^{-1}(E + i\nu)\Gamma_0^{-1}(E + i\nu)\varphi(E + i\nu), W\varphi(E + i\nu) \rangle \\ &= \langle (\Gamma_0(E + i\nu)^{-1} + W)^{-1}(\Gamma_0(E + i\nu)^{-1} + W)\varphi(E + i\nu), W\varphi(E + i\nu) \rangle \\ &\quad - \langle \Gamma^{-1}(E + i\nu)W\varphi(E + i\nu), W\varphi(E + i\nu) \rangle \\ &= \langle \varphi(E + i\nu), W\varphi(E + i\nu) \rangle - \langle \Gamma^{-1}(E + i\nu)W\varphi(E + i\nu), W\varphi(E + i\nu) \rangle \end{aligned}$$

Puisque $E \notin [-4, 4]$, nous avons :

$$\lim_{\nu \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \langle \varphi(E + i\nu), W\varphi(E + i\nu) \rangle = 0.$$

Le développement en série de puissances de ν de la résolvante montre que l'on peut écrire $\varphi(E + i\nu)$ comme la somme :

$$\varphi(E + i\nu) = \varphi(E) - i\nu\varphi_1(E) + O(\nu^2)$$

où $\varphi_1(E)$ est un vecteur réel dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ et $O(\nu^2)$ est un vecteur dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ dont la norme se comporte comme ν^2 quand $\nu \rightarrow 0$. Notons

$$\varphi_1(E) = W\varphi(E).$$

Alors, en passant à la limite, on a

$$\begin{aligned} & - \lim_{\nu \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Im} \langle W\Gamma^{-1}(E + i\nu)\Gamma_0^{-1}(E + i\nu)\varphi(E + i\nu), \varphi(E + i\nu) \rangle \\ &= - \lim_{\nu \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \langle \Gamma^{-1}(E + i\nu)\varphi_1(E), \varphi_1(E) \rangle. \end{aligned}$$

Soit

$$\tilde{\varphi}_1(\alpha, E; z) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x(\omega z + \alpha)} \varphi_1(E; x).$$

Alors,

$$\varphi(E; x)_1 = \int_0^1 d\alpha \frac{1}{q} \sum_{z=1}^q e^{2\pi i x(\omega z + \alpha)} \tilde{\varphi}_1(\alpha, E; z)$$

et l'on peut écrire :

$$\langle \Gamma^{-1}(E + i\nu)\varphi(E), \varphi(E) \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \int_0^1 d\beta \langle \tilde{\Gamma}^{-1}(\beta, E + i\nu) \tilde{\varphi}_1(\beta, E), \tilde{\varphi}_1(\beta, E) \rangle_{\ell^2([1, q])}$$

où

$$(\tilde{\Gamma}(\alpha, E)\psi)(\beta, x) = \frac{\varepsilon}{2C} \{ \psi(\beta, x-1) + \psi(\beta, x+1) \} + V(\omega x + \beta, E)\psi(\beta, x).$$

Considérons $\tilde{\Gamma}(\beta, E + i\nu)$. Ici, il est essentiel que seul le potentiel V dépende du paramètre E et que nous ayons sa forme exacte (voir (2.10)). Il résulte de (2.10) que, pour tout β fixé, $V(\beta, E + i\nu)$ peut être décomposé en série de Taylor en ν dans un voisinage de E . Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(\beta; E + i\nu) &= \frac{\varepsilon}{2C} \Delta + V(\beta, E + i\nu) \\ &= \frac{\varepsilon}{2C} \Delta + V(\beta, E) + i\nu \frac{\partial V}{\partial E}(\beta, E) + \mathcal{O}(\nu^2) \\ &= \tilde{\Gamma}(\beta, E) + i\nu \frac{\partial V}{\partial E}(\beta, E) + \mathcal{O}(\nu^2). \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} &\lim_{\nu \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int d\beta \langle \tilde{\Gamma}^{-1}(\beta, E + i\nu) \tilde{\varphi}_1(\beta, E), \tilde{\varphi}_1(\beta, E) \rangle_{\ell^2([1, q])} \\ &= \lim_{\nu \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int d\beta \langle (\tilde{\Gamma}(\beta, E) + i\nu \frac{\partial V}{\partial E}(\alpha, E))^{-1} \tilde{\varphi}_1(\beta, E), \tilde{\varphi}_1(\beta, E) \rangle. \end{aligned}$$

Notons, pour simplifier, $D = \frac{\partial V}{\partial E}(\alpha, E)$. Il résulte de (3.24) que D est un opérateur positif.

Il possède donc une racine carrée positive $D^{1/2}$, et celle-ci est inversible. Nous avons :

$$\operatorname{Im}(\tilde{\Gamma}(\beta, E) + i\nu D)^{-1} = \operatorname{Im} D^{-1/2} ((D^{-1/2} \tilde{\Gamma}(\beta, E) D^{-1/2}) + i\nu)^{-1} D^{-1/2}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} &\lim_{\nu \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^1 d\beta \langle \tilde{\Gamma}^{-1}(\beta, E + i\nu) \tilde{\varphi}_1(\beta, E), \tilde{\varphi}_1(\beta, E) \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} \\ &= \lim_{\nu \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^1 d\beta \langle (D^{-1/2} \tilde{\Gamma}(\beta, E) D^{-1/2} + i\nu)^{-1} \\ &\quad \times D^{-1/2} \tilde{\varphi}_1(\beta, E), D^{-1/2} \tilde{\varphi}_1(\beta, E) \rangle. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Pour calculer cette dernière limite nous utilisons la décomposition spectrale de l'opérateur $D^{-1/2}\tilde{\Gamma}D^{-1/2}$. Comme l'opérateur $D^{-1/2}\tilde{\Gamma}D^{-1/2}$ agit dans un espace de dimension q , il a q valeurs propres $\mu_k(\alpha, E)$ et q fonctions propres $\phi_k(\alpha, E)$, $k = 1, \dots, q$. Le produit scalaire qui figure dans (4.4) s'écrit alors comme suit :

$$\langle (D^{-1/2}\tilde{\Gamma}D^{-1/2} + i\nu)^{-1}D^{-1/2}\tilde{\varphi}_1, D^{-1/2}\tilde{\varphi}_1 \rangle = \sum_{l=1}^q \frac{|\langle D^{-1/2}\tilde{\varphi}_1, \phi_l \rangle|^2}{\mu_l(\alpha, E) + i\nu}.$$

Remarquons que pour passer à la limite nous devons seulement savoir si l'opérateur $D^{-1/2}\tilde{\Gamma}D^{-1/2}$ est inversible, ou non. Puisque $D^{1/2}$ est un opérateur positif, les deux opérateurs $\tilde{\Gamma}$ et $D^{-1/2}\tilde{\Gamma}D^{-1/2}$ sont simultanément inversibles, ou non, ce qui implique que

$$0 \in \sigma(\tilde{\Gamma}(\beta, E)) \Leftrightarrow 0 \in \sigma(D^{-1/2}(\beta, E)\tilde{\Gamma}(\beta, E)D^{-1/2}(\beta, E)).$$

Les transformations que nous avons faites jusqu'ici valent toutes pour tout $E \in I$. Fixons maintenant un $\alpha \in [0, 1)$ et posons $E = \mathcal{E}(\alpha)$. Alors, l'opérateur $\tilde{\Gamma}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha))$ a 0 pour valeur propre. Soit $k_0 = k_0(\alpha)$ le numéro de la valeur propre de $\tilde{\Gamma}(\alpha, E)$ qui s'annule en $E = \mathcal{E}(\alpha)$:

$$\lambda_{k_0}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha)) = 0.$$

Il en résulte immédiatement que :

- (i) $\mu_l(\beta, \mathcal{E}(\alpha)) \neq 0$ pour tout $l \neq k_0(\alpha)$ et pour tout β ;
- (ii) $\mu_{k_0}(\beta, \mathcal{E}(\alpha)) \neq 0$ pour tout $\beta \neq \alpha$;
- (iii) $\mu_{k_0}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha)) = 0$ et $\phi_{k_0}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha)) = D^{1/2}\psi_{k_0}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha))$,
où $\psi_{k_0}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha))$ est la fonction propre de $\tilde{\Gamma}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha))$ associée à la valeur propre $\lambda_{k_0}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha))$, i.e. $\tilde{\Gamma}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha))\psi_{k_0}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha)) = 0$.

Supposons que $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha}(\alpha) \neq 0$. Il résulte du théorème 1 que $\mathcal{E}(\alpha)$ a un nombre fini de points d'extremum et que les valeurs qu'elle prend en ces points correspondent aux extrémités des zones $[a_l, b_l]$, $l = 1, \dots, q$, du spectre. Nous allons donc calculer la limite (4.3) pour tous les points E du spectre à l'exception des extrémités des bandes. En passant à la

limite on obtient :

$$\begin{aligned}
& \lim_{\nu \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^1 d\beta \langle (D^{-1/2} \tilde{\Gamma}(\beta, E) D^{-1/2} + i\nu)^{-1} D^{-1/2} \tilde{\varphi}_1(\beta, E), D^{-1/2} \tilde{\varphi}_1(\beta, E) \rangle \\
&= \lim_{\nu \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \sum_{l \neq k_0(\alpha)} \int_0^1 d\beta \frac{-\nu}{\mu_l^2(\beta, \mathcal{E}(\alpha)) + \nu^2} |\langle D^{-1/2} \tilde{\varphi}_1, \phi_l \rangle|^2 \\
&\quad + \lim_{\nu \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^1 d\beta \frac{-\nu}{\mu_{k_0}^2(\beta, \mathcal{E}(\alpha)) + \nu^2} |\langle D^{-1/2} \tilde{\varphi}_1, \phi_{k_0} \rangle|^2 \\
&= \frac{|\langle D^{-1/2} \tilde{\varphi}_1, \phi_{k_0}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha)) \rangle|^2}{\frac{\partial \mu_{k_0}}{\partial \beta}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha))} \\
&= \frac{|\langle D^{-1/2} \tilde{\varphi}_1, D^{1/2} \psi_{k_0}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha)) \rangle|^2}{\frac{\partial \mu_{k_0}}{\partial \beta}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha))}.
\end{aligned}$$

Finalemment :

$$\begin{aligned}
& \lim_{\nu \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^1 d\beta \langle (D^{-1/2} \tilde{\Gamma}(\beta, E) D^{-1/2} + i\nu)^{-1} D^{-1/2} \tilde{\varphi}_1(\beta, E), D^{-1/2} \tilde{\varphi}_1(\beta, E) \rangle \\
&= \frac{|\langle \tilde{\varphi}_1, \psi_{k_0} \rangle|^2}{\frac{\partial \mu_{k_0}}{\partial \beta}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha))}. \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Il est nécessaire de s'assurer que

$$\frac{\partial \mu_{k_0}}{\partial \beta}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha)) \neq 0.$$

Pour calculer la dérivée de μ_{k_0} par rapport à β au point $(\alpha, \mathcal{E}(\alpha))$ nous dérivons d'abord formellement l'égalité

$$D^{-1/2} \tilde{\Gamma} D^{-1/2} \phi_{k_0} = \mu_{k_0} \phi_{k_0}$$

par rapport au paramètre β , ce qui donne :

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} D' D^{-3/2} \left[D^{-1/2} \tilde{\Gamma} D^{-1/2} \right] \phi_{k_0} + D^{-1/2} V' D^{-1/2} \phi_{k_0} \\
& -\frac{1}{2} \left[D^{-1/2} \tilde{\Gamma} D^{-1/2} \right] D' D^{-3/2} \phi_{k_0} + \left[D^{-1/2} \tilde{\Gamma} D^{-1/2} \right] \phi'_{k_0} = -\mu'_{k_0} \phi_{k_0} + \mu_{k_0} \phi'_{k_0}.
\end{aligned}$$

Posons $\beta = \alpha$, $E = \mathcal{E}(\alpha)$. Alors, $D^{-1/2} \tilde{\Gamma} D^{-1/2} \phi_{k_0} = 0$ et $\mu_{k_0}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha)) = 0$. On en déduit que :

$$D^{-1/2} V' D^{-1/2} \phi_{k_0} - \frac{1}{2} \left[D^{-1/2} \tilde{\Gamma} D^{-1/2} \right] D' D^{-3/2} \phi_{k_0} + \left[D^{-1/2} \tilde{\Gamma} D^{-1/2} \right] \phi'_{k_0} = \mu'_{k_0} \phi_{k_0}.$$

Puisque $D^{-1/2}$ est un opérateur diagonal positif, l'opérateur $D^{-1/2}\tilde{\Gamma}D^{-1/2}$ est auto-adjoint. Le produit scalaire des deux membres de cette dernière égalité avec ϕ_{k_0} donne alors :

$$\left\langle \frac{\partial V}{\partial \alpha}(\alpha, E)D^{-1/2}\phi_{k_0}, D^{-1/2}\phi_{k_0} \right\rangle = \frac{\partial \mu_{k_0}}{\partial \beta}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha)) \langle \phi_{k_0}, \phi_{k_0} \rangle.$$

Puisque $\phi_{k_0}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha)) = D^{1/2}\psi_{k_0}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha))$ et que $D(\alpha, E) = \frac{\partial V}{\partial E}(\alpha, E)$, il vient :

$$\left\langle \frac{\partial V}{\partial \alpha}(\alpha, E)\psi_{k_0}, \psi_{k_0} \right\rangle = \frac{\partial \mu_{k_0}}{\partial \beta}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha)) \left\langle \frac{\partial V(\alpha, E)}{\partial E}\psi_{k_0}, \psi_{k_0} \right\rangle.$$

Nous utilisons encore une fois les formules de la théorie des perturbations pour les dérivées des valeurs propres

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_{k_0}}{\partial \alpha} &= \left\langle \frac{\partial V}{\partial \alpha}\psi_{k_0}, \psi_{k_0} \right\rangle; \\ \frac{\partial \lambda_{k_0}}{\partial E} &= \left\langle \frac{\partial V}{\partial E}\psi_{k_0}, \psi_{k_0} \right\rangle. \end{aligned}$$

Alors, compte tenu du fait que $\frac{d\mathcal{E}_{k_0}}{d\alpha} = \frac{\frac{\partial \lambda_{k_0}}{\partial \alpha}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha))}{\frac{\partial \lambda_{k_0}}{\partial E}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha))}$, on a :

$$\frac{\partial \mu_{k_0}}{\partial \beta}(\alpha, \mathcal{E}(\alpha)) = \frac{d\mathcal{E}}{d\alpha}(\alpha).$$

Il n'est pas difficile de vérifier que le numérateur du membre de droite de (4.5) vaut :

$$|\langle \tilde{\varphi}_1, \psi_{k_0} \rangle|^2 = |u_E(X)|^2$$

où $u_E(X)$ est la fonction propre généralisée qui correspond à la valeur propre $E = \mathcal{E}(\alpha)$ définie par (4.2).

Ceci nous mène à la conclusion suivante. Pour tout $\alpha \in [0, 1)$ tel que $\mathcal{E}'(\alpha) \neq 0$, la limite suivante existe :

$$\lim_{\nu \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} g(X, X; \mathcal{E}(\alpha) + i\nu) = r_X(\alpha) = \frac{|u_{\mathcal{E}(\alpha)}(X)|^2}{\mathcal{E}'(\alpha)}.$$

La fonction $r_X(\alpha)$ représente la densité de la mesure spectrale de l'opérateur h comme fonction du paramètre α .

Le dernier pas qui nous reste à faire est d'exprimer la densité de la mesure spectrale comme fonction de E :

$$r_X(E) dE = \frac{|u_E(X)|^2}{|\mathcal{E}'(\gamma(E))|} dE = |u_E(X)|^2 \gamma'(E) dE, \quad (4.6)$$

où $\gamma(E)$ est la quasi-impulsion. Puisque ceci est vrai pour tout E , à un nombre fini d'exceptions près, il en résulte que la mesure spectrale de l'opérateur h restreinte à l'ensemble $\mathcal{E}((0, 1))$ est purement absolument continue.

4.3 Preuve du point 4 : la densité de la mesure spectrale

Il s'agit de montrer que la densité de la mesure spectrale de l'opérateur h que nous venons de calculer appartient à l'espace $L^s(I)$ pour tout $s \in [1, 2[$. Il résulte de notre construction (voir (4.6)) que la fonction $r(E)$ ne peut avoir d'autres points singuliers que les extrémités des zones $[a_l, b_l]$, $l = 1, \dots, q$ du spectre.

Soit E^* l'une de ces extrémités a_l ou b_l , $l = 1, \dots, q$. Montrons que la fonction $r(E)$ se comporte comme $\frac{1}{\sqrt{E - E^*}}$ au voisinage de E^* . Il suffit d'étudier le comportement de la fonction $\gamma'(E) = [\mathcal{E}'(\gamma(E))]^{-1}$ (voir (4.6)). Notons $\alpha^* = \gamma(E^*)$. Alors $\mathcal{E}(\alpha^*) = E^*$. Il résulte du théorème 1 que α^* est un point critique de $\mathcal{E}(\alpha)$, i.e.

$$\mathcal{E}'(\alpha^*) = 0. \quad (4.7)$$

Nous savons aussi (théorème 1) que les extrema de la fonction $\mathcal{E}(\alpha)$ sont non dégénérés. Plus précisément, pour tout α au voisinage de α^* tel que

$$\mathcal{E}'(\alpha) < \varepsilon^{3/2}, \quad (4.8)$$

on a :

$$\mathcal{E}''(\alpha) > \varepsilon^{-1/2}. \quad (4.9)$$

Ecrivons maintenant la formule de Taylor pour la fonction $\mathcal{E}(\alpha)$ au voisinage \mathcal{U} du point α^* où (4.9) est vraie :

$$\mathcal{E}(\alpha) = \mathcal{E}(\alpha^*) + \mathcal{E}'(\alpha^*)(\alpha - \alpha^*) + \frac{1}{2} \mathcal{E}''(\tilde{\alpha})(\alpha - \alpha^*)^2$$

où $\tilde{\alpha} \in \mathcal{U}$.

En posant $\alpha = \gamma(E)$ et $\alpha^* = \gamma(E^*)$, et compte tenu de (4.7), on trouve :

$$E - E^* = \frac{1}{2} \mathcal{E}''(\tilde{\alpha})(\gamma(E) - \gamma(E^*))^2.$$

Puisque (4.9) est vraie pour $\tilde{\alpha}$, on peut écrire :

$$\gamma(E) - \gamma(E^*) = \left| \frac{2(E - E^*)}{\mathcal{E}''(\tilde{\alpha})} \right|^{1/2}. \quad (4.10)$$

On écrit ensuite la formule de Taylor pour la fonction $\mathcal{E}'(\alpha)$ au même voisinage de α^* :

$$\mathcal{E}'(\alpha) = \mathcal{E}'(\alpha^*) + \mathcal{E}''(\tilde{\alpha})(\alpha - \alpha^*).$$

En utilisant (4.10) on en déduit :

$$\mathcal{E}'(\gamma(E)) = \mathcal{E}''(\tilde{\alpha})(\gamma(E) - \gamma(E^*)) = \sqrt{E - E^*} \cdot \sqrt{2\mathcal{E}''(\tilde{\alpha})}.$$

Alors, compte tenu de (4.9), on voit que $\gamma'(E)$ se comporte comme $\frac{1}{\sqrt{E - E^*}}$ au voisinage de chacun de ses points singuliers E^* . Puisque le nombre de ces points est fini, on peut en conclure que la fonction $\gamma'(E)$, et par conséquent la densité de la mesure spectrale de l'opérateur h , appartient à l'espace $L^s(I)$ pour tout $s \in [1, 2[$.

5 Preuves des résultats perturbatifs

5.1 Démonstration de la proposition 1 : perturbation sans résonance

Nous allons résoudre l'équation $H_\varepsilon \psi_k = \mu \psi_k$ dans la base des fonctions propres approchées. Nous cherchons la fonction propre ψ_k sous la forme :

$$\psi_k = \bar{\psi}_k + \sum_{j \neq k} x_j \bar{\psi}_j. \quad (5.1)$$

Puisque dans notre cas particulier les fonctions propres approchées coïncident avec la base canonique, nous avons aussitôt, compte tenu de la forme des vecteurs f_k donnée dans (3.2), le système d'équations suivant pour les coefficients x_j , $j \neq k$ et le paramètre μ .

$$\bar{\lambda}_k - \varepsilon(x_{k-1} + x_{k+1}) = \mu \quad (5.2)$$

$$(\mu - \bar{\lambda}_i)x_i + \varepsilon(x_{i-1} + x_{i+1}) = 0, \quad i \neq k, k+1, k-1$$

$$(\mu - \bar{\lambda}_{k\pm 1})x_{k\pm 1} + \varepsilon x_{k\pm 2} = \varepsilon. \quad (5.3)$$

Supposons d'abord que μ est un paramètre indépendant. On calcule les coefficients $x_j(\mu)$ en résolvant le système d'équations (5.3). Nous introduisons les matrices suivantes pour représenter ce système sous forme matricielle : la matrice diagonale D définie par

$$D_{ij} = \delta_{ij}(\mu - \bar{\lambda}_j), \quad i, j \neq k$$

et la matrice $F = (F_{ij})_{i,j \neq k}$ définie par

$$F_{ij} = \begin{cases} -\varepsilon & \text{si } |i - j| = 1, i, j \neq k \pm 1, \\ -\varepsilon & \text{si } i = 1, j = q, \\ -\varepsilon & \text{si } i = q, j = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note g_k le vecteur défini par $\{g_k(j) = f_k(j), j \neq k\}$. Le système (5.3) est alors équivalent à l'équation matricielle :

$$(D - F)X = g_k \quad (5.4)$$

où $X = \{x_j\}_{j \neq k}$.

La forme (3.2) des vecteurs f_k entraîne que $\|F\| = 2\varepsilon$.

Supposons que le paramètre μ varie dans un petit voisinage de $\bar{\lambda}_k$. De façon précise, supposons que :

$$|\mu - \bar{\lambda}_k| \leq \frac{1}{2}\varepsilon^{1/2}. \quad (5.5)$$

La condition de non résonance (3.3) entraîne que, pour tout $j \neq k$:

$$|\mu - \bar{\lambda}_j| \geq \frac{1}{2}\varepsilon^{1/2}. \quad (5.6)$$

Alors, la matrice D est inversible et l'on a les estimations suivantes :

$$\|D^{-1}\| \leq 2\varepsilon^{-1/2}; \quad \|D^{-1}F\| \leq 2\varepsilon^{1/2}. \quad (5.7)$$

L'équation (5.4) admet alors pour solution

$$X = (I - D^{-1}F)^{-1}D^{-1}g_k + D^{-1}g_k + D^{-1}FD^{-1}g_k + \sum_{l=2}^{\infty} (D^{-1}F)^l D^{-1}g_k. \quad (5.8)$$

Il résulte de (5.7) que

$$|x_j| \leq \text{const} \cdot \varepsilon^{1/2}, \quad j \neq k. \quad (5.9)$$

Reportons les coefficients x_j ainsi trouvés dans l'équation (5.2). Nous obtenons l'équation suivante pour μ :

$$\mu = \bar{\lambda}_k - \varepsilon(x_{k-1}(\mu) + x_{k+1}(\mu)) \quad (5.10)$$

Le membre de droite de (5.10) est continu en μ . Il n'est pas difficile de démontrer qu'il est dérivable en μ et que les hypothèses du théorème du point fixe sont vérifiées pour l'équation (5.10). Elle admet donc une solution, et une seule, dans l'intervalle $|\mu - \bar{\lambda}_k| \leq \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}$. Il résulte de plus de l'inégalité (5.9) et de (5.10) que

$$|\mu - \bar{\lambda}_k| \leq \frac{1}{2}\varepsilon^{3/2}. \quad (5.11)$$

Alors, en reportant dans (5.1) les coefficients x_j sous la forme (5.8), on peut représenter la fonction propre ψ_k comme dans (3.6), avec

$$\delta\psi_k = -\frac{\varepsilon}{\bar{\lambda}_k - \bar{\lambda}_{k-1}}\delta_{k-1} - \frac{\varepsilon}{\bar{\lambda}_k - \bar{\lambda}_{k+1}}\delta_{k+1}.$$

L'estimation (3.7) résulte alors de (5.8), (5.7)-(5.9) et (5.11). Ce qui achève de prouver la proposition 1. \square

5.2 Démonstration de la proposition 2 : perturbation avec résonance

Comme dans le cas précédent nous cherchons la fonction propre ψ sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs $\bar{\psi}_j$, $j = 1, \dots, q$:

$$\psi_{k_1 k_2} = A\bar{\psi}_{k_1} + B\bar{\psi}_{k_2} + \sum_{j \neq k_1, k_2} x_j \bar{\psi}_j.$$

L'équation $H_\varepsilon \psi = \mu \psi$ nous donne le système d'équations à coefficients inconnus A , B , μ et $\{x_j\}_{j \neq k_1, k_2}$:

$$A\mu = A\bar{\lambda}_{k_1} + Af_{k_1 k_1} + Bf_{k_2 k_1} + \sum_{j \neq k_1, k_2} x_j f_{j k_1} \quad (5.12)$$

$$B\mu = B\bar{\lambda}_{k_2} + Bf_{k_2 k_2} + Af_{k_1 k_2} + \sum_{j \neq k_1, k_2} x_j f_{j k_2} \quad (5.13)$$

$$x_j \mu = x_j \bar{\lambda}_j + Af_{k_1 j} + Bf_{k_2 j} + \sum_{l \neq k_1, k_2} x_l f_{l j}. \quad (5.14)$$

Tout comme dans la démonstration de la proposition 1, nous trouvons d'abord les coefficients x_j des équations (5.12)–(5.14), en supposant que μ est un paramètre indépendant. Soient

$$\begin{aligned} g_{k_i} &= \{f_{jk_i}\}_{j \neq k_1, k_2}, \quad i = 1, 2; \\ X &= \{x_j\}_{j \neq k_1, k_2}. \end{aligned}$$

On peut écrire le système d'équations (5.12)–(5.14) sous la forme d'une équation matricielle

$$(D - F)X = Ag_{k_1} + Bg_{k_2} \quad (5.15)$$

où D est une matrice diagonale dont les éléments sont définis par

$$D = (\delta_{ij}(\mu - \bar{\lambda}_j))_{i, j \neq k_1, k_2}$$

et où F est une matrice de norme $\|F\| = 2\varepsilon$.

Supposons que le paramètre μ varie de telle façon que

$$|\mu - \bar{\lambda}_j| \geq \varepsilon^{1/2}, \quad \forall j \neq k_1, k_2. \quad (5.16)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \|D^{-1}\| &\leq \varepsilon^{-1/2+\kappa}; \\ \|D^{-1}F\| &\leq \varepsilon^{1/2+\kappa}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Il en résulte aussitôt que l'équation (5.15) a une solution de la forme : $X = AY_{k_1} + BY_{k_2}$ où, pour $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} Y_{k_i} &= (I - D^{-1}F)^{-1}D^{-1}g_{k_i} \\ &= D^{-1}g_{k_i} + D^{-1}FD^{-1}g_{k_i} + \sum_{l=2}^{\infty} (D^{-1}F)^l D^{-1}g_{k_i}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

On déduit facilement de (5.18) l'estimation suivante :

$$\|Y_{k_i}\| \leq \text{const} \cdot \varepsilon^{1/2}. \quad (5.19)$$

Ensuite, en reportant les coefficients x_j dépendant de μ dans les équations (5.12)–(5.13), nous obtenons un système d'équations linéaires permettant de déterminer les paramètres inconnus A , B et μ . Notons $S = \|s_{ij}\|_{i,j=1}^2$ la matrice de ce système. Ses éléments matriciels sont de la forme :

$$\begin{aligned} s_{11} &= \bar{\lambda}_{k_1} - \varepsilon \tilde{y}_{11} & s_{12} &= -\varepsilon \tilde{y}_{12} \\ s_{21} &= -\varepsilon \tilde{y}_{21} & s_{22} &= \bar{\lambda}_{k_2} - \varepsilon \tilde{y}_{22} \end{aligned} \quad (5.20)$$

où \tilde{y}_{il} est la somme de deux des coefficients $y_j^{(k_i)}$ correspondant aux valeurs de l'indice j où f_{jk_i} est $\neq 0$.

Le système que nous avons ainsi obtenu signifie que μ doit être une valeur propre de la matrice S , donc solution de l'équation :

$$(s_{11} - \mu)(s_{22} - \mu) - s_{12} \cdot s_{21} = 0. \quad (5.21)$$

Cette équation a deux solutions :

$$\mu_{\pm} = \frac{s_{11} + s_{22}}{2} \pm \sqrt{(s_{11} - s_{22})^2 + 4s_{12}s_{21}}, \quad (5.22)$$

et l'on a deux vecteurs propres correspondants $\begin{pmatrix} A_+ \\ B_+ \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A_- \\ B_- \end{pmatrix}$.

Notons que dans les formules (5.20) les coefficients s_{ij} dépendent tous du paramètre μ . C'est pourquoi les deux égalités (5.22), avec $+$ ou $-$ devant la racine carrée, sont des équations qui donnent deux valeurs propres μ_{\pm} de l'opérateur $H_{\varepsilon}(\alpha, E)$. On peut démontrer l'existence de solutions de ces équations de la même façon que dans la proposition 1.

Le fait que les solutions ainsi obtenues vérifient la condition (5.16), nécessaire pour la convergence des séries dans (5.18), résulte de la définition des valeurs propres résonantes (3.4)-(3.5). En effet, en utilisant (3.5), (5.20) et (5.19), on obtient l'estimation :

$$|\mu_+ - \mu_-| = \sqrt{(s_{11} - s_{22})^2 + 4s_{12}s_{21}} \leq \varepsilon^{1/2}.$$

L'expression (5.22) entraîne alors que

$$\begin{aligned} |\mu_+ - \max\{s_{11}, s_{22}\}| &= |\mu_- - \min\{s_{11}, s_{22}\}| \\ &= \frac{1}{2} \left| \sqrt{(s_{11} - s_{22})^2 + 4s_{12}s_{21}} - |s_{11} - s_{22}| \right| \\ &\leq \text{const} \cdot \varepsilon^{3/2}. \end{aligned}$$

Comme $|s_{ii} - \bar{\lambda}_{k_i}| < \text{const} \cdot \varepsilon^{3/2}$ on obtient finalement :

$$\begin{aligned} |\mu_+ - \max\{\bar{\lambda}_{k_1}, \bar{\lambda}_{k_2}\}| &= |\mu_- - \min\{\bar{\lambda}_{k_1}, \bar{\lambda}_{k_2}\}| \\ &\leq \text{const} \cdot \varepsilon^{3/2}. \end{aligned}$$

Les démonstrations des autres estimations de l'énoncé de la proposition 2 ne présentent pas de difficultés particulières et nous ne les donnons pas.

Références bibliographiques

- [1] C. Albanese, KAM theory in momentum space and quasiperiodic Schrödinger operators, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **10** (1993), no. 1, 1–97.
- [2] S. Aubry et G. André, Analyticity breaking and Anderson localization in incommensurate lattices, *Group theoretical methods in physics* (Proc. Eighth Internat. Colloq., Kiryat Anavim, 1979), Hilger, Bristol, 1980, pp. 133–164.
- [3] J. Bellissard, R. Lima et D. Testard, A metal-insulator transition for the almost Mathieu model, *Commun. Math. Phys.* **88** (1983), no. 2, 207–234.
- [4] A.-M. Berthier (A. Boutet de Monvel), *Spectral theory and wave operators for the Schrödinger equation*, Research Notes in Mathematics, **71**, Pitman, Boston, 1982.
- [5] A. Boutet de Monvel et A. Surkova, Localisation des états de surface pour une classe d’opérateurs de Schrödinger discrets à potentiels de surface quasi-périodiques, *Helv. Phys. Acta* **71** (1998), no. 5, 459–490.
- [6] V.A. Chulaevsky et F. Delyon, Purely absolutely continuous spectrum for almost Mathieu operators, *J. Statist. Phys.* **55** (1989), no. 5-6, 1279–1284.
- [7] B. Khoruzhenko et L. Pastur, The localization of surface states: an exactly solvable model, *Physics Reports* **288** (1997), 109–126.
- [8] V. Grinshpun, Localization for random potentials supported on a subspace, *Lett. Math. Phys.* **34** (1995), no. 2, 103–117.
- [9] V. Jakšić et S. Molchanov, On the spectrum of the surface Maryland model, *Lett. Math. Phys.* **45** (1998), 189–193.
- [10] V. Jakšić, S. Molchanov et L. Pastur, On the propagation properties of surface waves, In: “Wave propagation in complex media” (Minneapolis, MN, 1994), 143–154, IMA *Vol. Math. Appl.* **96**, Springer, New York, 1998.
- [11] L. Pastur et A. Figotin, *Spectra of random and almost-periodic operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [12] J.W.S. Rayleigh, *Proc. London Math. Soc.* **17** (1887), no. 4.
- [13] ———, *The theory of sound*, Dover, N.Y., 1945.
- [14] M. Reed et B. Simon, *Methods of modern mathematical physics*, Academic Press, New York, 1972.
- [15] M. Schröder, On the spectrum of Schrödinger operators at the half space with a certain class of boundary conditions, *Z. Anal. Anwendungen* **7** (1988), no. 3, 233–239.
- [16] Ya.G. Sinai, Anderson localization for one-dimensional difference Schrödinger operator with quasiperiodic potential, *J. Statist. Phys.* **46** (1987), no. 5-6, 861–909.